

FUNKCJA WRAŻLIWOŚCI WZGLĘDNEJ I JEJ ZASTOSOWANIE W INŻYNIERII ROLNICZEJ

Zbigniew Dworecki, Andrzej Fiszer, Mariusz Łoboda, Jacek Przybył
Instytut Inżynierii Rolniczej, Akademia Rolnicza w Poznaniu

Streszczenie. Funkcja wrażliwości względnej określa siłę wpływu poszczególnych zmiennych na wartość funkcji pierwotnej. Obliczenia wrażliwości względnej można przeprowadzić po obliczeniu pochodnej cząstkowej. W pracy przedstawiono wrażliwości wybranych funkcji. Funkcję wrażliwości wykorzystano do określenia siły wpływu współczynników tarcia na napięcie wstępne złącza gwintowego przy stałym momencie dokręcania. Funkcję tą użyto również do określenia wpływu parametrów ciągnika, takich jak masa, momenty bezwładności, położenie środka ciężkości, sztywności opon na częstotliwości drgań własnych ciągnika. Zaprezentowano także wykorzystanie funkcji wrażliwości do oceny wpływu maszyny zawieszanej z tyłu ciągnika na te drgania.

Słowa kluczowe: wrażliwość względna, napięcie wstępne, drgania ciągnika

Wstęp

Jednym z najważniejszych zadań nauki jest badanie i opisywanie świata rzeczywistego. Naukowy opis obiektów, zjawisk, procesów, umożliwiający ich analizę, często polega na budowie modeli matematycznych. W zależności od rodzaju modelowanego podmiotu, dotychczasowej wiedzy naukowej, ilości i rodzaju obserwacji, modele matematyczne mogą być statyczne lub dynamiczne, ciągłe lub dyskretne, strukturalne lub empiryczne, deterministyczne lub statystyczne (również neuronowe). Wpływ na rodzaj modelu ma także cel, jaki przyświeca modelowaniu. Celem tym, oprócz analizy zjawisk, może być zmiana (cech, charakterystyk) obiektów lub sterowanie procesami. Aby zrealizować wymienione cele, oprócz zbudowania modelu matematycznego, często konieczna jest jego dogłębna analiza. Do jej przeprowadzenia stosuje się metody analizy matematycznej takie jak rachunek różniczkowy, całkowy, wektorowy, wariacyjny i rachunek prawdopodobieństwa z metodami statystycznymi. W analizie matematycznej często wykorzystuje się także liczby zespolone i szeregi Fouriera (analiza harmoniczna). W badaniu modeli matematycznych może pomóc funkcja wrażliwości względnej [Dworecki i in. 2001; Dworecki 2003]. Celem niniejszej pracy jest zbudowanie zależności przydatnych do obliczania wrażliwości wybranych funkcji, uwypuklenie różnic pomiędzy funkcją pochodną i funkcją wrażliwości oraz przedstawienie możliwości, przykładów i korzyści wynikających z zastosowania funkcji wrażliwości w inżynierii rolniczej.

Definicja funkcji wrażliwości względnej

Wrażliwość względną (znormalizowaną) W_i^y funkcji $y = f(x_i)$ na zmienną (parametr) x_i można zdefiniować zależnością:

$$W_i^y = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x_i} = \frac{x_i}{y} * \frac{\partial y}{\partial x_i}$$

Jest to nowa funkcja zmiennych x_i , będąca iloczynem czynnika wagowego danej zmiennej $\frac{x_i}{y}$ oraz pochodnej cząstkowej funkcji pierwotnej $\frac{\partial y}{\partial x_i}$. Dla jednej funkcji pierwotnej

można utworzyć tyle funkcji wrażliwości, ile zmiennych (i parametrów) występuje w funkcji pierwotnej. W uproszczeniu można przyjąć, że funkcja wrażliwości wskazuje o ile procent zmieni się wartość funkcji, jeżeli określona zmienna zwiększy się o 1%.

Pochodna (cząstkowa) mówi o zmianie funkcji, ale nie odnosi tej zmiany do wartości funkcji i wartości zmiennej. Jeżeli przykładowo porównamy pochodną najprostszej funkcji kwadratowej $y = x^2$ z pochodną funkcji przesuniętej np. o 5 wzdłuż osi odciętych; $y = (x - 5)^2$, oraz pochodną funkcji przesuniętej o 5 wzdłuż osi rzędnych; $y - 5 = x^2$, w tych samych punktach tych funkcji, odpowiednio (1;1), (6;1) i (1;6)), to pochodne tych funkcji będą oczywiście takie same ($\frac{\partial y}{\partial x} = 2$), pomimo że funkcje te są różne. Natomiast wrażliwości względne tych funkcji w wymienionych punktach będą wynosiły odpowiednio 2, 12 i 1/3. Wartości te mówią o ilościowym wpływie zmiennej na wartości tych funkcji. Wzrost zmiennej o 1% spowoduje wzrost poszczególnych funkcji odpowiednio o 2%, 12% i 0,(3)%. Dla funkcji wielu zmiennych, dzięki obliczeniu wrażliwości, można zidentyfikować tę zmienną, przy pomocy której najskuteczniej można zmieniać funkcję (sterowanie i regulacja).

Wrażliwości względne a pochodne cząstkowe wybranych funkcji

Porównując funkcje pochodne (cząstkowe) i funkcje wrażliwości różnych funkcji pierwotnych, można sprecyzować różnice w informacjach, jakie te funkcje przekazują o funkcji pierwotnej. Ekstrapolując przyrosty elementarne zmiennych i funkcji używane w definicji pochodnej, można przyjąć, że pochodna funkcji mówi o ile zmieni się funkcja (w jednostkach funkcji), jeżeli zmienna zmieni się o jeden (w jednostkach zmiennej). Funkcja wrażliwości względnej odnosi te zmiany do wartości funkcji i wartości zmiennej (zmiany procentowe). W wyniku tej różnicy między funkcją pochodną a funkcją wrażliwości względnej, pojawiają się pewne różnice w ich obliczaniu:

1. Pochodna cząstkowa iloczynu liczby i funkcji $y = a \cdot f(x_i)$ jest iloczynem liczby i pochodnej funkcji; $y'_i = a \cdot f'(x_i)$, wrażliwość natomiast jest taka sama jak wrażliwość samej funkcji: $W_i^y = W_i(f(x_i))$.

2. Pochodna cząstkowa sumy funkcji $y = f(x_i) + g(x_i)$ jest zwykłą sumą pochodnych: $y'_i = f'(x_i) + g'(x_i)$. Wrażliwość w tym przypadku jest sumą iloczynów wrażliwości tych funkcji i wag, jakie te funkcje mają w całej sumie funkcji: $W_i^y = \frac{f}{y} \cdot W_i^f + \frac{g}{y} \cdot W_i^g$.
3. Pochodna cząstkowa iloczynu funkcji $y = f(x_i) \cdot g(x_i)$ wynosi: $y'_i = f'(x_i) \cdot g(x_i) + f(x_i) \cdot g'(x_i)$. Wrażliwość iloczynu funkcji na daną zmienną x_i jest zwykłą sumą wrażliwości tych funkcji na tę zmienną: $W_i^y = W_i^f + W_i^g$. Powoduje to, że obliczenie wrażliwości iloczynu większej ilości funkcji jest dużo prostsze niż obliczenie pochodnej takiego iloczynu.
4. Pochodna cząstkowa funkcji złożonej $y = f(u)$ gdzie $u = g(x_i)$, jest iloczynem pochodnej funkcji zewnętrznej i pochodnej funkcji wewnętrznej: $y'_i = f'(u) \cdot g'(x_i)$. Podobnie wrażliwość funkcji złożonej jest iloczynem wrażliwości funkcji zewnętrznej na funkcję wewnętrzną i wrażliwości funkcji wewnętrznej na zmienną: $W_i^y = W_u^y \cdot W_i^u$.
5. Pochodne cząstkowe funkcji $y = \sum_{i=1}^n (a_i x_i)$ są równe $y'_i = a_i$. Wrażliwość na zmienną x_i będzie wynosiła $W_i^y = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^n (a_i x_i)} \cdot a_i$, czyli tyle ile udziału ma składnik $a_i x_i$ w wartości funkcji y (wrażliwość będzie równa wadze składnika $a_i x_i$). Łatwo zauważyć, że suma wrażliwości na wszystkie zmienne będzie w tym przypadku wynosiła 1.
6. Pochodna funkcji jednej zmiennej $y = x^r$ wynosi $y' = r x^{r-1}$. Wrażliwość względna znormalizowana tej funkcji będzie wynosić: $W^y = r$, czyli przybiera tu wartość takiej liczby rzeczywistej, jaką ma wykładnik r .
7. Pochodna cząstkowa funkcji $y = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n$ wynosi $y'_i = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}{x_i}$.

Natomiast wrażliwość względna na każdą ze zmiennych jest tu taka sama i wynosi $W_i^y = 1$.

Jak widać, dla przedstawionych funkcji, obliczanie wrażliwości względnej przebiega podobnie jak obliczanie pochodnej. W niektórych przypadkach jest prostsze, w innych bardziej skomplikowane niż obliczanie pochodnych.

Przykłady zastosowania funkcji wrażliwości względnej w inżynierii rolniczej

Warunki pracy maszyn rolniczych mogą być przyczyną zmian współczynników tarcia pomiędzy elementami złączy gwintowych występujących w tych maszynach. Zmiany te powodują, że przy dokręcaniu złącza tym samym momentem dokręcającym, uzyskamy różne napięcia wstępne złączy Q [Łoboda i inni 1997]. Wartość napięcia wstępnego uzy-

skanego po dokręceniu złącza określonym momentem dokręcającym zależy, między innymi, od współczynnika tarcia na powierzchni gwintu μ_g i współczynnika tarcia na powierzchni czołowej nakrętki μ_{op} . W celu sprawdzenia jak zmienia się napięcie wstępne złącza gwintowego przy zmianie tych współczynników tarcia, zbudowano funkcje wrażliwości względnej znormalizowanej napięcia wstępnego na zmianę wymienionych współczynników tarcia [Dworecki, Łoboda 2003]. Obliczeń dokonano dla złącza M16, powszechnie stosowanego w maszynach rolniczych.

$$W_{\mu_g}^O = -0,340$$

$$W_{\mu_{op}}^O = -0,514$$

Wyniki obliczeń potwierdziły znaną zależność mówiącą o tym, że przy dokręcaniu złącza stałym momentem, większą siłę napięcia wstępnego uzyskamy w złączu o mniejszych współczynnikach tarcia na powierzchni czołowej nakrętki i na powierzchni gwintu. Okazało się, że na napięcie wstępne złącza gwintowego uzyskane przy stałym momencie dokręcającym, większy wpływ ma współczynnik tarcia na powierzchni czołowej nakrętki niż współczynnik tarcia na powierzchni gwintu. Różnica wpływu analizowanych współczynników nie jest duża, ale jest wyraźna. Przeprowadzone obliczenia wskazują, że szczególnie ważna jest niezmiennosc współczynnika tarcia na powierzchni czołowej nakrętki. Zmniejszenie rozrzutu współczynników tarcia można uzyskać poprzez wymianę nakrętek przed każdym dokręcaniem i stosowanie odpowiedniego smaru.

Funkcję wrażliwości względnej zastosowano również do oceny wpływu różnych parametrów ciągnika rolniczego na jego drgania własne [Dworecki i in. 2006]. Obliczono wrażliwości względne częstotliwości drgań pionowych f_{1b} , f_{1c} (częstotliwość drgań pionowych obliczono na podstawie dwóch modeli: w płaszczyźnie bocznej i w płaszczyźnie czołowej), częstotliwości kołysania przód-tył f_{2b} i częstotliwości wahanja na boki f_{2c} , na poszczególne parametry ciągnika. Parametrami tymi były, występujące w modelach matematycznych częstotliwości drgań wielkości, takie jak masa ciągnika m , jego momenty bezwładności J_b , J_c w płaszczyźnie bocznej i czołowej, odległość środka ciężkości ciągnika l od osi przedniej, sztywności opon kół przednich k_p i tylnych k_t .

Tabela 1. Wrażliwość częstotliwości drgań własnych ciągnika na jego parametry
Table 1. Sensitivity of tractor free vibration frequencies to its parameters

Parametr	Wrażliwość częstotliwości drgań własnych			
	f_{1b}	f_{2b}	f_{1c}	f_{2c}
m	-0,46	-0,04	-0,50	0
J_b	-0,04	-0,46	0	0
J_c	0	0	0	-0,50
l	-0,44	0,44	0	0
k_p	0,06	0,44	0,21	0,21
k_t	0,44	0,02	0,29	0,29

Źródło: Dworecki i in. 2006

Wyniki tych obliczeń (tab. 1) wykazały, że na drgania pionowe zasadniczy wpływ ma masa ciągnika i sztywność opon tylnych. Wzrost masy ciągnika powoduje spadek często-

tliwości drgań pionowych. Sztywniejsze opony tylne zwiększą częstotliwość drgań. Znaczący wpływ na te drgania ma również położenie środka ciężkości ciągnika. Obliczenia wykazały mały wpływ sztywności opon przednich i momentów bezwładności na częstotliwość drgań pionowych.

Jeśli chodzi o częstotliwość kołysania przód-tył, to obliczenia wykazały podobny wpływ na nią sztywności opon przednich i odległości środka ciężkości od osi przedniej. Wpływ momentu bezwładności w płaszczyźnie bocznej na tę częstotliwość jest równie silny, ale jego wzrost powoduje obniżenie tej częstotliwości. Masa ciągnika nie ma wpływu na częstotliwość kołysania przód-tył.

Częstotliwość wahanja na boki silnie zależy od momentu bezwładności ciągnika w płaszczyźnie czołowej. Wzrost tego momentu bezwładności powoduje spadek częstotliwości drgań. Wpływ sztywności opon przedniej i sztywności opony tylnej na częstotliwość wahanja na boki jest podobny i o połowę mniejszy niż wpływ momentu bezwładności. Wzrost tych sztywności powoduje wzrost częstotliwości wahanja na boki.

Funkcję wrażliwości względnej wykorzystano również do zbadania jak wpłynie zawieszenie maszyny rolniczej z tyłu ciągnika na wymienione wyżej częstotliwości drgań własnych [Dworecki 2003]. Z punktu widzenia dynamiki ciągnika, maszynę rolniczą charakteryzują takie parametry jak masa m_p , momenty bezwładności w płaszczyźnie bocznej J_{pb} i czołowej J_{pc} oraz odległość jej środka ciężkości od osi tylnej ciągnika b .

Wyniki obliczeń wrażliwości względnej częstotliwości (tab. 2) wykazały, że z wymienionych parametrów maszyny, na drgania pionowe ciągnika oraz jego kołysanie przód-tył najsilniej wpływa położenie środka ciężkości maszyny w stosunku do ciągnika. Na częstotliwość wahanja no boki wpływa moment bezwładności maszyny w płaszczyźnie czołowej.

Tabela 2. Wrażliwość częstotliwości drgań ciągnika na parametry zawieszanej maszyny
Table 2. Sensitivity of tractor vibration frequencies to the parameters of suspended machine

Parametr	Wrażliwości częstotliwości drgań własnych			
	F_{1b}	f_{2b}	f_{1c}	f_{2c}
m_p	-0,03	-0,02	-0,05	0
J_{pb}	-0,01	-0,01	0	0
J_{pc}	0	0	0	-0,04
b	-0,08	0,08	0	0

Źródło: na podstawie danych zawartych w pracy Dworeckiego [2003]

Możliwości wykorzystania funkcji wrażliwości względnej

Funkcja wrażliwości względnej umożliwia ocenę siły wpływu poszczególnych zmiennych i parametrów na wartość funkcji pierwotnej. Obliczenie wrażliwości funkcji na różne parametry pozwala porównać siłę wpływu tych zmiennych i parametrów. Siła wpływu jednej zmiennej na wartość funkcji jest różna w różnych miejscach tej funkcji. Dlatego otrzymywane wyniki liczbowe obliczeń wrażliwości dotyczą konkretnego punktu funkcji pierwotnej. Badana funkcja może być mało wrażliwa na zmianę danej zmiennej w otoczeniu interesującego nas punktu. Stanowić to może problem w sterowaniu, jeżeli chcemy

zmieniać wartość funkcji poprzez zmianę jednego sygnału sterującego, na który funkcja jest mało wrażliwa. Zmieniając inne zmienne (parametry, sygnały) możemy zwiększyć wrażliwość funkcji na ten sygnał. Aby dowiedzieć się, które zmienne zmienić, aby „uwrażliwić” funkcję na dany sygnał należy powtórnie obliczyć wrażliwość. Otrzymana funkcja to wrażliwość funkcji wrażliwości:

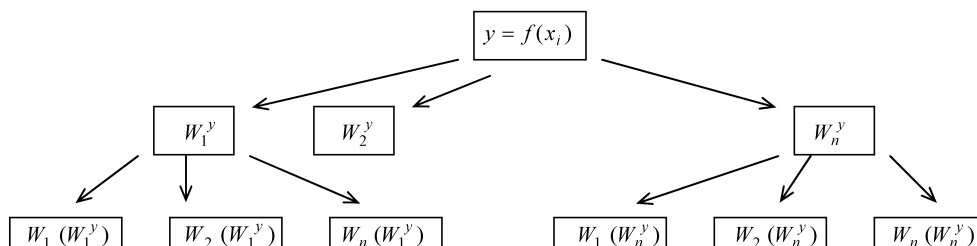
$$W_i(W_j^y) = \frac{\partial \ln W_j^y}{\partial \ln x_i} = \frac{x_i}{W_j^y} \cdot \frac{\partial W_j^y}{\partial x_i}$$

Obliczenie wrażliwości W_i funkcji wrażliwości W_j^y na wszystkie zmienne x_i i porównanie ich wskaże tę zmienną, której wartość należy zmienić (podwyższyć, obniżyć), aby sterowanie zmienną x_j było bardziej efektywne. Obliczanie wrażliwości funkcji wrażliwości może mieć również wiele innych zastosowań. Badając funkcję wrażliwości funkcji wrażliwości, ponownie można zastosować funkcję wrażliwości. Takie postępowanie jest analogiczne do obliczania drugiej, trzeciej i kolejnej pochodnej.

Z jednej funkcji można wygenerować wiele „poziomów” wrażliwości [Dworecki 2003]:

W_j^y , $W_i(W_j^y)$, $W_h(W_i(W_j^y))$, $W_g(W_h(W_i(W_j^y)))$, itd.

Dla n zmiennych na p -tym poziomie otrzymamy n^p funkcji wrażliwości.



Obliczanie wrażliwości funkcji na różnych „poziomach” może dać odpowiedź na wiele interesujących badacza pytań.

W inżynierii rolniczej tworzy się różne modele matematyczne. Najczęściej są to modele empiryczne, które w naukach empirycznych są podstawowym opisem badanych zjawisk i procesów. W modelach empirycznych (na przykład: regresyjnych) siłę wpływu poszczególnych zmiennych na wartość funkcji, określają współczynniki występujące przy tych zmiennych.

Coraz częściej jednak w inżynierii rolniczej buduje się modele strukturalne (poznawcze, wyjaśniające). W modelach strukturalnych, do określenia siły wpływu zmiennych, można wykorzystać funkcję wrażliwości względnej. Jest to celowe szczególnie wtedy, gdy chcemy porównać siłę wpływu różnych zmiennych i parametrów na wartość funkcji.

Korzyści, jakie można osiągnąć dzięki zastosowaniu funkcji wrażliwości względnej mogą być bardzo duże, na przykład przy badaniu siły wpływu takich różnorodnych czynników, jak warunki glebowe, nawadnianie, temperatura, promieniowanie itp. na wyso-

kość plonów. Wysokość plonów była przedmiotem zainteresowania człowieka od czasów rozpoczęcia produkcji rolniczej. Dokładne określenie wpływu różnych czynników na plony będzie możliwe po zbudowaniu odpowiednich modeli matematycznych. Prace nad takimi modelami rozpoczęto pod koniec ubiegłego wieku [Manes 1995; Wit 1982]. Doprowadziły one do zbudowania wielu wersji systemu „Decision Support System for Agrotechnology Transfer – DSSAT” pozwalającego na przewidywanie zbiorów kilkunastu roślin. Przybliżyła to możliwość optymalizacji wzrostu plonów. Funkcja wrażliwości względnej może tu być bardzo pomocna.

Bibliografia

- Dworecki Z., Łoboda M., Krysztofiak A.** 2001. Numeryczna analiza drgań ciągnika rolniczego z wykorzystaniem analizy wrażliwości. *Inżynieria Rolnicza*, 11 (31). s. 61-67.
- Dworecki Z.** 2003. Badania drgań ciągnika z zawieszoną maszyną rolniczą w kontekście ich oddziaływania na operatora. *Inżynieria Rolnicza*, 5 (47). s. 1-96.
- Dworecki Z., Łoboda M.** 2003. Wrażliwość napięcia wstępnego na zmianę warunków trybologicznych w złączach gwintowych stosowanych w maszynach rolniczych. *Inżynieria Rolnicza*, 12 (54). s. 91-96.
- Dworecki Z., Fiszer A., Łoboda M., Przybył J.** 2006. Porównanie wpływu wybranych parametrów ciągnika rolniczego na jego drgania. *Inżynieria Rolnicza*, 13 (88).
- Łoboda M., Boniecki P., Dworecki Z.** 1997. Subsequent tightening of the same screw joints. *Prace Przemysłowego Instytutu Maszyn Rolniczych. Poznań. Vol. 42, 2. s. 52-57.*
- Manes A.** 1995. Seasonal Forecasting of Precipitation in Israel, research report No 1. Beit Dagan. (Report No. 1).
- Wit de C.T.,** 1982. Simulation of living systems. In: *Simulation of plant growth and crop production.* ed. by F.W.T. Pening de Vries and H.H. Van Laar. pp. 3-8. Centre for Agric. Pub. And Doc. (PUDOC) Wageningen.

THE RELATIVE SENSITIVITY FUNCTION AND ITS APPLICATION IN AGRICULTURAL ENGINEERING

Summary. The relative sensitivity function determines the power of impact of individual variables on the primitive value. Relative sensitivity may be computed after having calculated partial derivative. The paper presents sensitivity values for certain functions. The sensitivity function was used to determine the power of impact of friction coefficients on initial tension of screwed joint at constant tightening torque. This function was also used to determine the impact of tractor parameters (including: weight, moments of inertia, gravity centre position, tyre rigidity) on the frequencies of tractor free vibrations. Moreover, the paper discusses using the sensitivity function to determine the impact of machine suspended in the back of the tractor on these vibrations.

Key words: relative sensitivity, initial tension, tractor vibrations

Adres do korespondencji:

Zbigniew Dworecki; e-mail: dworecki@au.poznan.pl
Instytut Inżynierii Rolniczej
Akademia Rolnicza w Poznaniu
ul. Wojska Polskiego 50
60-627 Poznań