

Dorota Domagała<sup>1</sup>, Mirosława Wesółowska-Janczarek<sup>\*</sup>, Tomasz Guz<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup>Katedra Zastosowań Matematyki

<sup>\*\*</sup>Katedra Inżynierii i Maszyn Spożywczych  
Akademia Rolnicza w Lublinie

## LICZBA REPLIKACJI PRZY ESTYMACJI KONTRASTÓW W DOŚWIADCZENIU Z MODUŁEM SPRĘŻYSTOŚCI MIĄŻSZU JABŁEK

### Streszczenie

W pracy przedstawiono zastosowanie iteracyjnej procedury wyznaczenia liczebności próby przy ustalonej długości przedziałów ufności Scheffe'go dla kontrastów w doświadczeniu z modulem sprężystości mięszu jabłek trzech odmian przechowywanych w zróżnicowanych warunkach: w chłodni zwykłej lub komorze ULO, z okresem kwarantanny termicznej i bez, a następnie w chłodziarce lub komorze termicznej.

**Słowa kluczowe:** liczebność próby, liczba replikacji, kontrast, przedział ufności Scheffe'go, komora ULO, chłodnia zwykła, moduł sprężystości

### Wprowadzenie

Jedną z koncepcji parametrycznego wnioskowania statystycznego jest estymacja przedziałowa, która polega na wyznaczeniu tzw. przedziału ufności zawierającego wartość nieznanego parametru z pewnym zadaniem prawdopodobieństwem [Kala, 1999]. Ponieważ każda wartość z przedziału ufności może być równie dobrą oceną nieznanego parametru, tak uzyskana ocena nie jest jednoznaczna. Niejednoznaczność ta pozwala wnioskować o precyzji uzyskanej oceny. Jeżeli przedział ufności jest krótki to precyzja jest duża i odwrotnie. Długość przedziału ufności zależy między innymi od liczebności próby. Zwiększanie liczebności próby powoduje zmniejszanie długości przedziału i tym samym zwiększa precyzję oceny nieznanego parametru. Jednocześnie jednakże podnosi koszty eksperymentu. Przedziały ufności można budować nie tylko dla pojedynczych parametrów, lecz także dla kontrastów, które są liniowymi funkcjami parametrów.

## **Cel pracy**

Celem pracy było wskazanie sposobu ustalania liczebności próby (przez liczebność próby rozumiemy tutaj liczbę replikacji jako, że liczba poziomów czynnika jest z góry ustalona) przy konstruowaniu przedziałów ufności Scheffe'go dla kontrastów w doświadczeniu z modułem sprężystości miększu jabłek. Oraz wyznaczenie odpowiedniej liczby replikacji dla uzyskania przedziałów ufności Scheffe'go o ustalonej długości dla wybranych typów kontrastów.

## **Materiały i metodyka badań**

Materiałem badawczym były owoce jabłoni trzech odmian: Elise, Gala oraz Golden Delicious, które składowano w komorze ULO i w chłodni zwykłej przez 90 dni. Z trzech owoców każdej odmiany formowano, do jednego pomiaru, 15 próbek cylindrycznych o średnicy 13 mm i wysokości 10 mm z plastrów wyciętych ze środkowej części jabłka. Próbki miększu poddano testowi ściskania ( $v = 50$  mm/min,  $\varepsilon = 50\%$ ) w aparacie Instron 4302, a następnie wyznaczono moduł sprężystości. Wielkość ta została wyznaczana dla próbek z owoców bezpośrednio po ich pobraniu z chłodni lub komory ULO, po założonym czasie składowania (próbki kontrolne). Wartość modułu obliczono także dla próbek pochodzących z owoców, które były dodatkowo przechowywane w chłodniarce (w temperaturze 6°C) lub w komorze termicznej (w temperaturze 20°C) przez okres 21 dni oraz dla próbek pochodzących z owoców, które przed przechowywaniem (odpowiednio w temperaturze 6°C lub 20°C przez 17 dni) poddawane były kwarantannie termicznej w temperaturze 39°C przez 96 godzin.

## **Przedziały ufności Scheffe'go i liczebność próby**

Istotą estymacyjnego podejścia do planowania liczebności próby jest sprecyzowanie interesujących eksperymentatora kontrastów (porównań) i określenie oczekiwanej długości przedziału ufności dla różnych liczebności próby przy danej z góry, wcześniej ocenionej wartości odchylenia standardowego. Jest to procedura iteracyjna, rozpoczynająca się dla pewnej początkowej liczebności próby. Jeśli uzyskana długość przedziału ufności uwzględniająca początkową liczebność próby jest satysfakcjonująca, proces iteracji zostaje zakończony. Jeśli przedział ufności jest zbyt długi, sprawdza się większą liczebność próby. Jeśli zaś przedział jest krótszy niż powinien, sprawdza się mniejszą liczebność próby. Proces jest kontynuowany aż do momentu wyznaczenia takiej liczebności próby, która pozwala ustalić odpowiednią długość przedziału ufności dla określonego typu kontrastów.

Aby wyznaczyć przedziały ufności dla wybranych typów kontrastów (tzw. przedziały ufności Scheffe'go), stosuje się procedurę jednoczesnej estymacji Scheff'ego [Neter i in. 1996]. Kontrast ( $L$ ), inaczej porównanie, jest definiowany jako liniowa kombinacja średnich poziomów czynnika:

$$L = \sum_{i=1}^a c_i \mu_i ,$$

gdzie współczynniki  $c_i$  sumują się do zera:

$$\sum_{i=1}^a c_i = 0 .$$

Nieobciążonym estymatorem kontrastu  $L$  jest:

$$\hat{L} = \sum_{i=1}^a c_i \hat{\mu}_i ,$$

gdzie  $\hat{\mu}_i$  jest estymatorem średniej dla  $i$ -tego poziomu czynnika.

Wariancja estymatora kontrastu  $L$  ma postać:

$$\text{var}(\hat{L}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{r} \sum_{i=1}^a c_i^2 ,$$

gdzie  $\sigma^2$  oznacza wariancję w populacji badanej cechy, zaś  $r$  jest liczbą replikacji odpowiadającą każdemu z poziomów czynnika. Przedziały ufności Scheffe'go dla rodziny kontrastów  $L$  mają postać:

$$\left( \hat{L} - \sqrt{(a-1)F(1-\alpha; a-1; N-a)} \text{var}(\hat{L}); \hat{L} + \sqrt{(a-1)F(1-\alpha; a-1; N-a)} \text{var}(\hat{L}) \right)$$

( $a = 5$  – oznacza tu liczbę poziomów czynnika,  $1-\alpha$  – poziom ufności,  $N$  – całkowitą liczebność próby, przy czym  $N = ra$ , zaś  $F(1-\alpha; a-1; N-a)$  jest wartością tablicową zmiennej losowej  $F$  [Okta, 2000]).

Długość tak otrzymanego przedziału ufności wynosi zatem:

$$2\sqrt{(a-1)F(1-\alpha; a-1; N-a)} \text{var}(\hat{L}) .$$

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $\mu_0^Z$  – średni moduł sprężystości populacji owoców przechowywanych w chłodni zwykłej;
- $\mu_6^Z$  – średni moduł sprężystości populacji owoców przechowywanych w chłodni zwykłej, a po wyjęciu także w chłodziarce w temperaturze 6°C;
- $\mu_{20}^Z$  – średni moduł sprężystości populacji owoców przechowywanych w zwykłej chłodni, a po wyjęciu w komorze termicznej w temperaturze 20°C;

- $\mu_{T6}^Z$  – średni moduł sprężystości populacji owoców przechowywanych w chłodni zwykłej, poddanych kwarantannie termicznej, a następnie przechowywanych w chłodziarce w temperaturze 6°C;
- $\mu_{T20}^Z$  – średni moduł sprężystości populacji owoców przechowywanych w chłodni zwykłej, poddanych kwarantannie termicznej, a następnie przechowywanych w komorze termicznej w temperaturze 20°C;
- $\mu_0^U$  – średni moduł sprężystości populacji owoców przechowywanych w komorze ULO;
- $\mu_6^U$  – średni moduł sprężystości populacji owoców przechowywanych w komorze ULO, a po wyjęciu także w chłodziarce w temperaturze 6°C;
- $\mu_{T6}^U$  – średni moduł sprężystości populacji owoców przechowywanych w chłodni zwykłej, poddanych kwarantannie termicznej, a następnie przechowywanych w chłodziarce w temperaturze 6°C;
- $\mu_{20}^U$  – średni moduł sprężystości populacji owoców przechowywanych w komorze ULO, a po wyjęciu w komorze termicznej w temperaturze 20°C;
- $\mu_{T20}^U$  – średni moduł sprężystości populacji owoców przechowywanych w komorze ULO, poddanych kwarantannie termicznej, a następnie przechowywanych w komorze termicznej w temperaturze 20°C.

Interesują nas następujące rodzaje kontrastów (oddzielne dla każdego sposobu przechowywania):

- 1) między dowolną populacją a populacją kontrolną:

$$\mu_6^Z - \mu_0^Z, \quad \mu_{20}^Z - \mu_0^Z, \quad \mu_{T6}^Z - \mu_0^Z, \quad \mu_{T20}^Z - \mu_0^Z;$$

$$\mu_6^U - \mu_0^U, \quad \mu_{20}^U - \mu_0^U, \quad \mu_{T6}^U - \mu_0^U, \quad \mu_{T20}^U - \mu_0^U;$$

- 2) między populacją kontrolną a średnią pozostałych czterech populacji:

$$\frac{\mu_6^Z + \mu_{20}^Z + \mu_{T6}^Z + \mu_{T20}^Z}{4} - \mu_0^Z, \quad \frac{\mu_6^U + \mu_{20}^U + \mu_{T6}^U + \mu_{T20}^U}{4} - \mu_0^U;$$

- 3) między średnią populacji poddawanych i nie poddawanych kwarantannie termicznej a populacją kontrolną:

$$\frac{\mu_6^Z + \mu_{20}^Z}{2} - \mu_0^Z, \quad \frac{\mu_{T6}^Z + \mu_{T20}^Z}{2} - \mu_0^Z, \quad \frac{\mu_6^U + \mu_{20}^U}{2} - \mu_0^U, \quad \frac{\mu_{T6}^U + \mu_{T20}^U}{2} - \mu_0^U;$$

4) między średnimi z populacji poddawanych i nie poddawanych kwarantannie termicznej:

$$\frac{\mu_6^Z + \mu_{20}^Z}{2} - \frac{\mu_{T6}^Z + \mu_{T20}^Z}{2}, \quad \frac{\mu_6^U + \mu_{20}^U}{2} - \frac{\mu_{T6}^U + \mu_{T20}^U}{2}.$$

Dla powyższych typów kontrastów wariancje estymatorów  $L$  wynoszą odpowiednio:

$$1) \quad \text{var}(\hat{L}) = \frac{2\sigma^2}{r};$$

$$2) \quad \text{var}(\hat{L}) = \frac{5\sigma^2}{4r};$$

$$3) \quad \text{var}(\hat{L}) = \frac{3\sigma^2}{2r};$$

$$4) \quad \text{var}(\hat{L}) = \frac{\sigma^2}{r}.$$

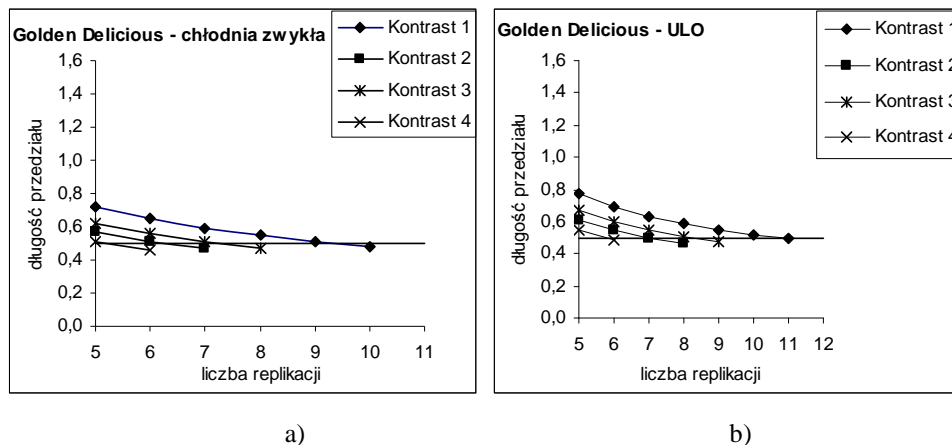
### Wyniki i dyskusja

Ponieważ moduł sprężystości miąższu jabłek nie ma rozkładu normalnego, analizę przeprowadzono na średnich (każda średnia została obliczona z 3 obserwacji, zatem liczba replikacji  $r = 5$ ). Przyjęto poziom ufności  $1 - \alpha = 95\%$ .

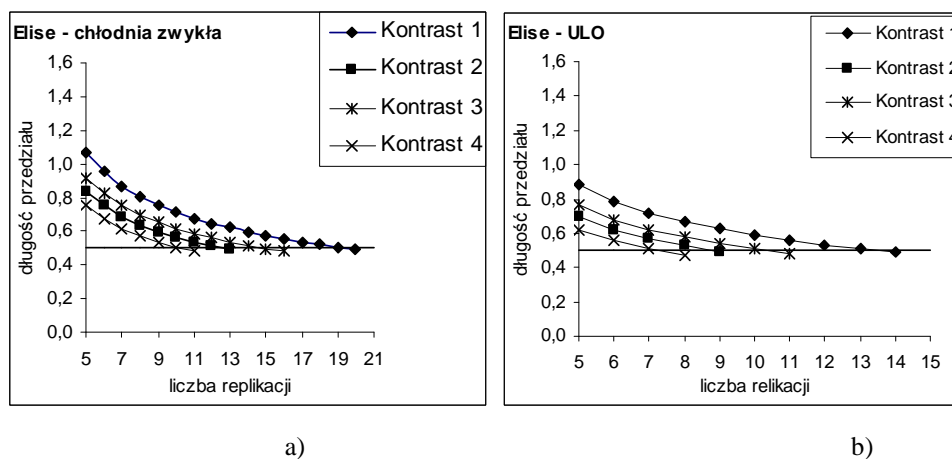
W procedurze iteracji wyznaczano długości przedziałów Scheffe'go dla kontrastów 1 - 4 dla kolejnych naturalnych wartości  $r$ , jako początkową wartość przyjmując  $r = 5$ , aż do momentu otrzymania przedziału o długości 0,5.

Rysunki 1-3 przedstawiają otrzymane długości przedziałów ufności Scheffe'go dla wyżej określonych czterech typów kontrastów.

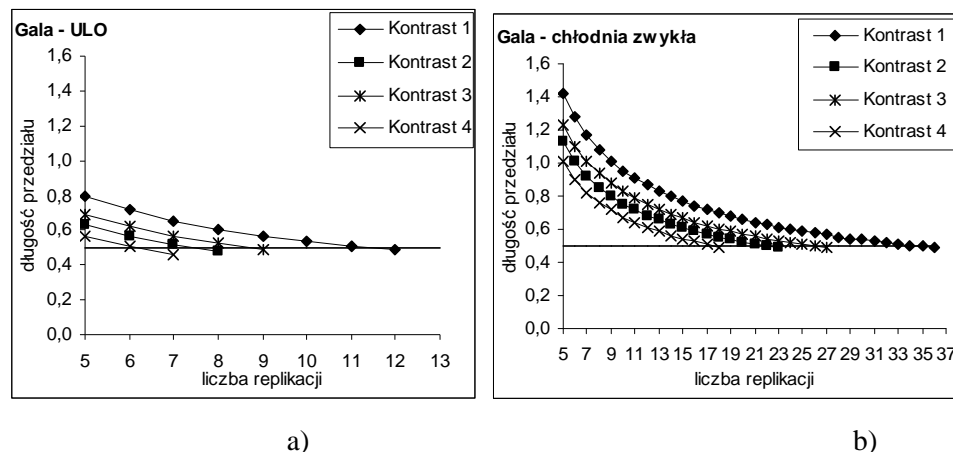
W przypadku owoców przechowywanych w komorze ULO, dla odmiany Elise i Gala, wyznaczone przedziały ufności dla kontrastów są krótsze niż dla owoców przechowywanych w zwykłej chłodni, natomiast dla odmiany Golden Delicious są porównywalne. Jest to spowodowane tym, że odchylenie standardowe modułu sprężystości miąższu było niższe dla owoców przechowywanych w komorze ULO niż dla owoców przechowywanych w zwykłej chłodni.



Rys. 1. Długości przedziałów Scheffe’go dla kontrastów dla owoców odmiany Golden Delicious przechowywanych w: a) chłodni zwykłej, b) komorze ULO  
 Fig. 1. Length of Scheffe’s ranges for contrasts for Golden Delicious fruit stored in: a) ordinary cold store, b) ULO chamber



Rys. 2. Długości przedziałów ufności Scheffe’go dla kontrastów dla owoców odmiany Elise przechowywanych w: a) chłodni zwykłej, b) komorze ULO  
 Fig. 2. Length of Scheffe’s ranges for contrasts for Elise fruit stored in: a) ordinary cold store, b) ULO chamber



Rys. 3. Długości przedziałów ufności Scheffe'go dla kontrastów dla owoców odmiany Gala przechowywanych w: a) chłodni zwykłej, b) komorze ULO  
 Fig. 3. Length of Scheffe's ranges for contrasts for Gala fruit stored in: a) ordinary cold store, b) ULO chamber

Jak wskazują otrzymane dane (rys. 1-3), najkrótsze przedziały ufności dla wszystkich czterech typów kontrastów uzyskano dla odmiany Golden Delicious, najdłuższe zaś dla odmiany Gala (dla owoców przechowywanych w chłodni zwykłej). Wskazuje to na możliwość zróżnicowania liczby replikacji w zależności od odmiany jabłek. Określoną długość przedziału ufności dla kontrastów zapewnia zatem wybór mniejszej liczby replikacji pobranej w przypadku owoców odmiany Golden Delicious niż w przypadku owoców odmiany Elise i odmiany Gala. W celu uzyskania przedziału ufności o długości 0,5 należy ustalić liczbę replikacji dla każdej z odmian i sposobu przechowywania zgodnie z danymi w tabeli 1.

Tabela 1. Liczba replikacji  $r$  wymagana do uzyskania przedziału ufności Scheffe'go o długości 0,5 dla kontrastów 1-4.

Table 1. The number of replications  $r$  required to obtain Scheffe's range of trust 0.5 long for contrasts 1-4.

Odmiana	Chłodnia zwykła				ULO			
	Kontrast				Kontrast			
	1	2	3	4	1	2	3	4
Golden Delicious	10	7	8	6	11	8	9	6
Elise	20	13	16	11	14	9	11	8
Gala	35	23	27	18	12	8	9	7

Uwzględniając fakt, że analizę przeprowadzono na danych uśrednionych należy pomnożyć otrzymaną liczbę replikacji przez 3, uzyskując faktycznie wymaganą liczbę replikacji.

## Wnioski

1. Na liczbę replikacji wymaganą do otrzymania określonej długości przedziałów ufności Scheffe'go dla kontrastów ma wpływ:
  - odmiana jabłek - dla owoców przechowywanych w chłodni zwykłej,
  - sposób przechowywania – dla owoców odmiany Elise i Gala przechowywanych w chłodni zwykłej liczby replikacji są znacznie wyższe niż w przypadku gdy owoce tych odmian przechowywane są w komorze ULO.
2. W przypadku owoców przechowywanych w komorze ULO liczby replikacji dla badanych odmian są porównywalne, a zatem można wnioskować, że odmiana nie ma znaczącego wpływu na liczbę replikacji.
3. Sposób przechowywania owoców odmiany Golden Delicious nie wpływa znacząco na liczbę replikacji.

## Bibliografia

Kala R. 1999. Elementy wnioskowania parametrycznego dla przyrodników. Wydawnictwo Akademii Rolniczej im. A. Cieszkowskiego w Poznaniu.

Neter J., Kutner M.H., Nachtsheim C.J., Wasserman W. 1996. Applied linear statistical models. TMHEG Inc.

Oktaba W. 2000. Metody statystyki matematycznej w doświadczałnictwie. Wydawnictwo Akademii Rolniczej w Lublinie.

## THE NUMBER OF REPLICATIONS IN ESTIMATION OF CONTRASTS IN AN EXPERIMENT WITH THE MODULE OF APPLE FLESH ELASTICITY

### Summary

The study presents an application of an iterative procedure in determination of the number of tests at determined length of Scheffe's ranges of trust for contrasts in an experiment with the module of apple flesh elasticity for three varieties stored in different conditions: in an ordinary cold store or ULO chamber, with the period of thermal quarantine and without, and then in a refrigerator of a thermal chamber.

**Key words:** Test number, number of replications, contrast, Scheffe's trust range, ULO chamber, ordinary cold store, elasticity module