

Wojciech Przystupa
Katedra Zastosowań Matematyki
Akademia Rolnicza w Lublinie

MODEL MATEMATYCZNY RUCHU GRANUL NAWOZU PO ZEJŚCIU Z TARCZY ROZSIEWAJĄCEJ

Streszczenie

W pracy zbadano wpływ zaburzeń losowych na odległość h , w jakiej cząsteczka nawozu spadnie od tarczy rozsiewacza odśrodkowego. Do opisu ruchu cząsteczek nawozu po tarczy rozsiewacza wykorzystano stochastyczne równanie Langevina.

Słowa kluczowe: model matematyczny, rozsiewacz odśrodkowy, równanie Langevina

Wykaz oznaczeń

- ω – prędkość kątowna tarczy [$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$],
- R_d – promień tarczy [m],
- F – siła oporu powietrza [N],
- g – przyspieszenie ziemskie [$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$],
- α – kąt nachylenia tarczy [$^\circ$],
- m – masa cząsteczki nawozu [kg],
- D – współczynnik dyfuzji [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$],
- μ_v – współczynnik tarcia między materiałem, z jakiego wykonana jest łopatką, a cząstką nawozu,
- μ_d – współczynnik tarcia między materiałem, z jakiego wykonana jest tarczą, a cząstką nawozu,
- t – czas [s],
- ρ_a – gęstość powietrza [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$],
- C_w – współczynnik oporu,
- A – powierzchnia cząstki nawozu [m^2],
- V – prędkość cząstki [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$],
- ρ_p – gęstość cząstki nawozu [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$],
- d – średnica cząstki nawozu [m].

Wprowadzenie

Na jakość pracy tarczowego zespołu rozsiewającego decydujący wpływ mają parametry geometryczno-kinematyczne tarczy rozsiewającej. Ruch cząstki nawozu podzielić można na dwa okresy: ruch po tarczy i swobodny lot w powietrzu. Do opisu ruchu cząstek nawozu po tarczy rozsiewającej stosuje się deterministyczne równania ruchu [Mieszalski 1998; Olieslagers i in. 1996]. W równaniach tych nie uwzględnia się oddziaływania cząstek nawozu między sobą. W układach rzeczywistych trajektoria ruchu cząstki podlega zaburzeniom stochastycznym. cząstki nawozu po obracającej się tarczy poddany zaburzeniom losowym. W pracy przedstawiono prosty model matematyczny opisujący ruch cząstki nawozu po obracającej się tarczy i po zejściu z tarczy rozsiewacza.

Cel i zakres pracy

Celem pracy było zbadanie wpływu zaburzeń losowych, jakim podlega cząstka nawozu poruszająca się po tarczy rozsiewacza odśrodkowego, na odległość w jakiej cząstka nawozu spadnie od tarczy rozsiewacza. Do opisu ruchu cząstki nawozu po obracającej się tarczy wykorzystano stochastyczne równanie Langevina.

Równanie ruchu cząsteczki nawozu po tarczy

Deterministyczne równanie ruchu cząsteczki nawozu poruszającej się po obracającej się tarczy wzdłuż łopatki ma postać [Mieszalski 1998]:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = m\omega^2 r - mg\mu_d - 2m\omega\mu_v \frac{dr}{dt} \quad (1)$$

Wprowadźmy następujące zmienne bezwymiarowe:

$$\begin{aligned} \tau &= \omega t \\ X &= \frac{r}{R_d} \end{aligned} \quad (2)$$

Po wstawieniu wyrażeń (2) do równania (1) otrzymamy:

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} = X - \frac{g\mu_d}{\omega^2 R_d} - 2\mu_v \frac{dX}{d\tau} \quad (3)$$

W przypadku występowania zaburzeń stochastycznych, równanie różniczkowe drugiego rzędu (3) można zapisać w postaci [Risken 1984]:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{d\tau} &= Y \\ \frac{dY}{d\tau} &= X - \frac{g\mu_d}{\omega^2 R_d} - 2\mu_v Y + \sqrt{D}\xi(\tau)\end{aligned}\quad (4)$$

gdzie $\xi(\tau)$ jest gaussowskim białym szumem, takim że

$$\begin{aligned}\langle \xi(\tau) \rangle &= 0 \\ \langle \xi(\tau)\xi(\tau') \rangle &= 2\delta(\tau - \tau')\end{aligned}\quad (5)$$

Rozwiązując równanie (4) otrzymujemy składową prędkości cząsteczki nawozu wzdłuż łopatki, $\frac{dr}{dt}$. Wartość prędkości cząsteczki nawozu w chwili zejścia z tarczy otrzymujemy z wyrażenia:

$$V = \sqrt{R_d^2 \omega^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}\quad (6)$$

Równanie ruchu cząstki nawozu w powietrzu

Ogólne równanie ruchu cząstki nawozu po opuszczeniu łopatki dla przypadku, gdy tarcza jest ustawiona pod dowolnym kątem w stosunku do powierzchni pola ma następującą postać [Mieszalski 1998, Olieslagers i in. 1996]:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -F \cos \alpha\quad (7)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg - F \sin \alpha\quad (8)$$

Siła oporu powietrza działająca na cząstkę ma postać:

$$F = \frac{1}{2} \rho_a C_w A V^2\quad (9)$$

Zakładając, że cząstki nawozu mają kształt kuli, można napisać:

$$m = \frac{\pi}{6} \rho_p d^3\quad (10)$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4}\quad (11)$$

Wstawiając wyrażenia (9-11) do (7) i (8) otrzymamy:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad (12)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - k \frac{dy}{dt} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad (13)$$

gdzie:

$$k = \frac{3}{4} \frac{C_w \rho_a}{d \rho_p} \quad (14)$$

Wprowadźmy nowe zmienne bezwymiarowe τ , X i Y zdefiniowane następująco:

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{a}. \quad (15)$$

gdzie a i T zdefiniowane są następująco:

$$a = \frac{v^2}{2g} \sin 2\alpha + \frac{v}{g} \cos \alpha \sqrt{2gh + v^2 \sin^2 \alpha}, \quad (16)$$

$$T = \frac{v \sin \alpha + \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}. \quad (17)$$

Po wstawieniu wyrażen (15) do równań (12-13) otrzymujemy:

$$\frac{dX}{d\tau} = V_x \quad (18)$$

$$\frac{dV_x}{d\tau} = -kaV_x \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad (19)$$

$$\frac{dY}{d\tau} = V_y \quad (20)$$

$$\frac{dV_y}{d\tau} = -\frac{gT^2}{a} - kaV_y \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad (21)$$

gdzie: V_x i V_y oznaczają składowe prędkości

Rozwiązując numerycznie układ równań (18-21) otrzymujemy odległość h , w jakiej cząsteczka nawozu spadnie od tarczy rozsiewacza.

Wyniki symulacji komputerowych

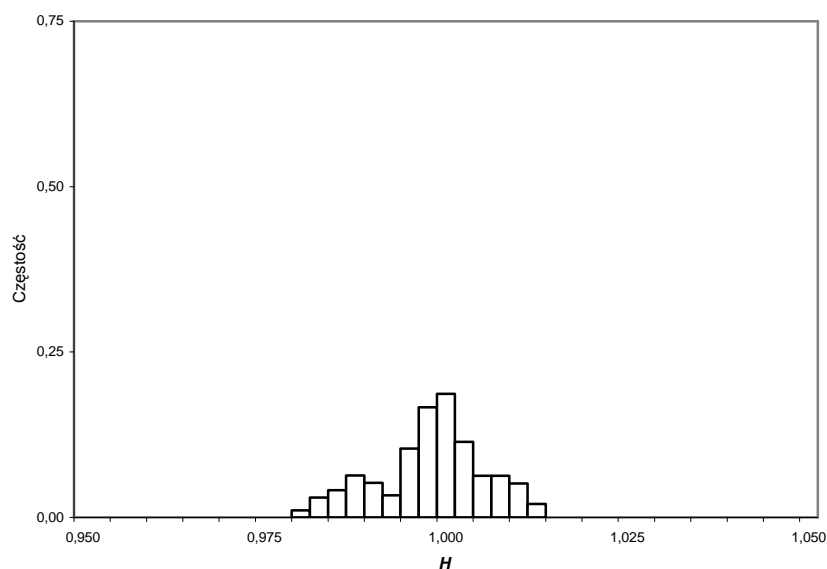
W celu rozwiązania układu równań (18-21), wykorzystano metodę Rungego-Kutty o stałym kroku czasowym $\tau=0,00001$. Obliczenia przeprowadzono dla następujących parametrów: $\mu_v=0,3$, $\mu_d=0,3$, $R_d=0,3m$, $\omega=52,36$ rad/s i $N=5000$ trajektorii. W celu porównania otrzymanych wyników wprowadzono względną odległość H określoną następująco:

$$H = \frac{h}{h_0} \quad (22)$$

gdzie:

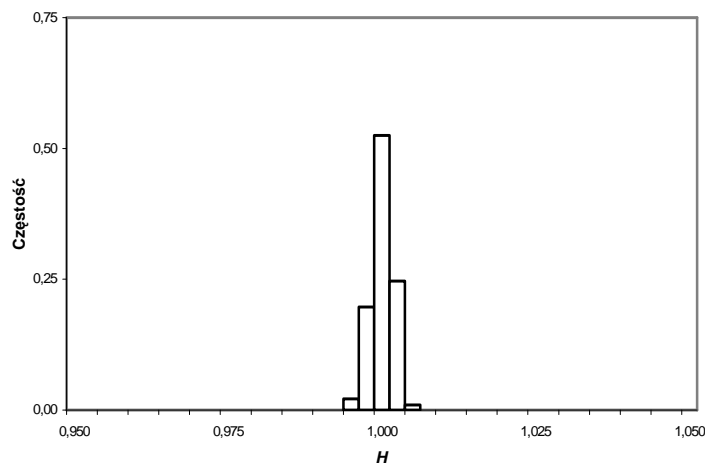
- h – odległość, w jakiej cząstka nawozu spadnie od tarczy rozsiewacza dla $D \neq 0$,
- h_0 – odległość, w jakiej cząstka nawozu spadnie od tarczy rozsiewacza dla $D=0$.

Na rysunkach 1-4 przedstawiono rozkłady względnej odległości H , w jakiej cząsteczka nawozu spadnie od tarczy rozsiewacza. Badania symulacyjne przeprowadzono dla różnych wartości współczynników dyfuzji D i współczynnika oporu C_w .



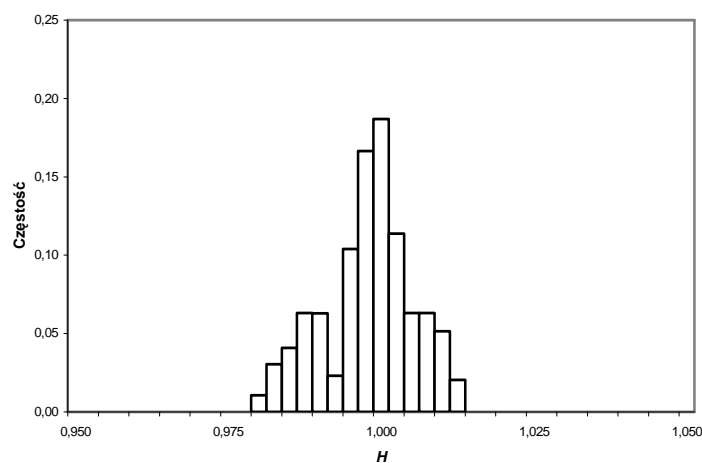
Rys. 1. Rozkład względnej odległości H , w jakiej cząsteczka nawozu spadnie od tarczy rozsiewacza dla współczynnika oporu $C_w=0,44$ i współczynnika dyfuzji $D=0,001$

Fig. 1. The distribution of the relative distance H , in which a manure particle will drop from the scatterer disk for the drag coefficient $C_w=0,44$ and the diffusion coefficient $D=0,001$



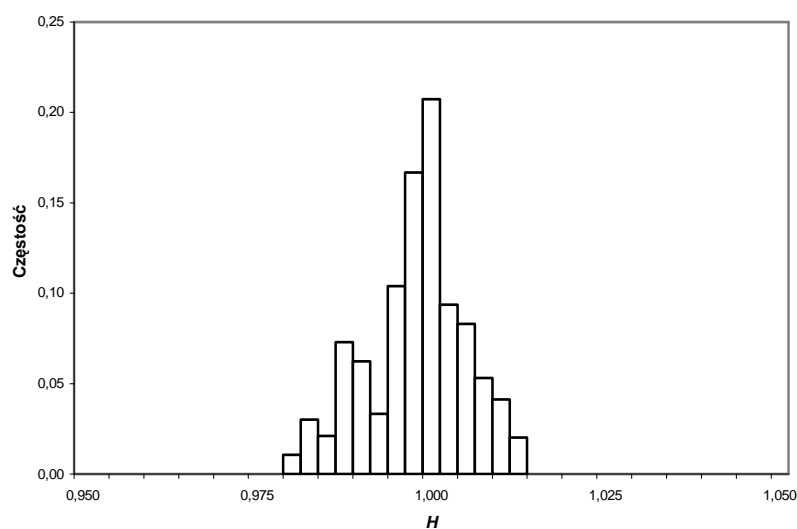
Rys. 2. Rozkład względnej odległości H , w jakiej cząsteczka nawozu spadnie od tarczy rozsiewacza dla współczynnika oporu $C_w=0,44$ i współczynnika dyfuzji $D=0,0001$

Fig. 2. The distribution of the relative distance H , in which a manure particle will drop from the scatterer disk for the drag coefficient $C_w=0,44$ and the diffusion coefficient $D=0,0001$



Rys. 3. Rozkład względnej odległości H , w jakiej cząsteczka nawozu spadnie od tarczy rozsiewacza dla współczynnika oporu $C_w=0,5$ i współczynnika dyfuzji $D=0,001$

Fig. 3. The distribution of the relative distance H , in which a manure particle will drop from the scatterer disk for the drag coefficient $C_w=0,5$ and the diffusion coefficient $D=0,001$



Rys. 4. Rozkład względnej odległości H , w jakiej cząsteczka nawozu spadnie od tarczy rozsiewacza dla współczynnika oporu $C_w=0,4$ i współczynnika dyfuzji $D=0,001$

Fig. 4. The distribution of the relative distance H , in which a manure particle will drop from the scatterer disk for the drag coefficient $C_w=0,4$ and the diffusion coefficient $D=0,001$

Jak widać na rysunkach 1-2 wraz ze wzrostem wartości współczynnika dyfuzji D i stałej wartości współczynnika oporu $C_w=0,44$ zmienia się rozkład względnej odległości H . W przypadku stałej wartości współczynnika dyfuzji D , a różnej wartości współczynnika oporu C_w otrzymujemy podobne rozkłady przedstawione na rysunkach 3-4. Współczynnik dyfuzji D może być wykorzystany do badania wpływu zaburzeń losowych na współczynnik nierównomierności poprzecznej rozsiewu.

Podsumowanie

W pracy przedstawiono prosty model matematyczny opisujący ruch cząstki nawozu po obracającej się tarczy i po zejściu z tarczy rozsiewacza. Wyznaczono rozkłady względnej odległości H , w jakiej cząsteczka nawozu spadnie od tarczy rozsiewacza dla wybranych wartości współczynnika dyfuzji D i współczynnika oporu powietrza C_w . Do opisu ruchu cząstki wzdłuż łopatki tarczy rozsiewacza wykorzystano stochastyczne równanie Langevina.

Bibliografia

Mieszkalski L. 1998. Elementy matematycznego opisu wybranych zespołów narzędzi i maszyn rolniczych. Wydawnictwo ART, Olsztyn.

Olieslagers R., Ramon H., Baerdemaeker J. 1996. Calculation of fertilizer distribution patterns from a spinning disc spreader by means of a simulation model. Journal of Agricultural Engineering Research Vol. 63: 137-152.

Risken H. 1984. Fokker-Planck equation: Method of solution and applications. Springer Verlag, Berlin.

MATHEMATICAL MODEL OF MANURE PELLET MOVEMENT AFTER LEAVING THE SCATTERING DISK

Summary

Examined was the effect of random disturbances on the distance h , in which a manure particle will drop from the centrifugal scattering disk. To describe the movement of manure particles on the scatterer disk, a Langevine stochastic equation was used.

Key words: mathematical model, centrifugal scattering disk, Langevine stochastic equation