Khachatur Kyreghyan, Andrzej Kornacki, Wiesław Piekarski
Wydział Inżynierii Produkcji
Katedra Zastosowań Matematyki
Akademia Rolnicza w Lublinie

ANALITYCZNA ZALEŻNOŚĆ DO WYZNACZENIA CIŚNIENIA W HYDROSTATYCZNYM ŁOŻYSKU POPRZECZNYM ŚLIZGOWYM

Streszczenie

Praca przedstawia analityczne rozwiązanie równania Reynoldsa służące do wyznaczenia teoretycznego rozkładu ciśnienia oleju wewnątrz łożyska poprzecznego ślizgowego. Ogólne równanie Reynoldsa (przy zadanych warunkach brzegowych oraz funkcji zużycia łożyska) sprowadzono do postaci uproszczonej (równanie Riccatiego), podano ostateczne rozwiązanie analityczne.

Słowa kluczowe: równanie Reynoldsa, równanie Riccatiego, łożysko poprzeczne ślizgowe, smarowanie hydrodynamiczne

Wstęp

W analizie kryterium oceny procesów zużycia węzła czop-panewka istotną rolę odgrywa ocena zachowania się w pracy dynamicznie obciążonego łożyska ślizgowego. Teoretyczną ocenę pracy łożyska dokonuje się na podstawie rozkładu ciśnienia oleju wewnątrz łożyska wyznaczonego jako rozwiązanie równania Reynoldsa po zadanych warunkach brzegowych. Według równania Reynoldsa ciśnienie w hydrodynamicznej warstwie oleju powstanie wówczas, gdy powierzchnie tarcia utworzą szczelinę w kształcie klina olejowego, którego wielkość zależy od luzu łożyskowego.

Rozwiązanie analityczne ogólnego równania Reynoldsa jest trudne do wyznaczenia, gdyż zależy ściśle od wyboru warunków początkowych i brzegowych jak również od wyboru funkcji zużycia łożyska. W związku z powyższym uzyskanie zależności wyznaczającej rozkład ciśnienia wewnątrz łożyska poprzecznego ślizgowego jest możliwe jedynie w postaci przybliżonej natomiast wyznaczenie tej zależności w postaci analitycznej wymaga szeregu uproszczeń modelowych dotyczących między innymi warunków brzegowych oraz funkcji zużycia łożyska.

W niniejszej pracy zaproponowano przekształcenie tradycyjnej postaci równania Reynoldsa przy prostych warunkach brzegowych co umożliwiło wyznaczenie analitycznej postaci rozwiązania dla funkcji zużycia łożyska zaproponowanego przez W. Piekarskiego [1994], przy stałej wartości współczynnika lepkości cieczy smarującej.

Równanie modelowe dynamicznie obciążonego łożyska poprzecznego ślizgowego

Powszechnie znane równanie Reynoldsa

$$\frac{\partial^2 P(x,z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 P(x,z)}{\partial x^2} + \frac{3}{h(x)} \cdot \frac{\partial h(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial P(x,z)}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

Przy warunkach brzegowych

$$p = p_0 \quad dla \quad z = \pm \frac{L}{2}$$
$$p = p_w(x)\, dla \quad z = 0$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_w = -\frac{3\pi a^4 n\left(p_z - p_w\right)}{4c^3 L\left(1-\varepsilon \cos\left(\frac{x}{R}\right)\right)^3}\, dla \quad z = 0. \tag{1a}$$

przedstawia zależność ciśnienia oleju *P(x, z)* od funkcji zużycia łożyska

$$f(x) = \frac{3}{h(x)} \cdot \frac{\partial h(x)}{\partial x} = \frac{3e \sin\left(\frac{x}{R}\right)}{Rc\left[1-\varepsilon \cos\left(\frac{x}{R}\right)\right]} \tag{2}$$

ponadto

$$h(x) = c(1-\varepsilon \cos\theta) \tag{2a}$$

gdzie:

- c – luz promieniowy [mm]
- ε – mimośrodowość względna łożyska,
- L – długość łożyska [mm]
- R – promień czopa [mm]
- p_0 – ciśnienie otoczenia [Pa],
- p_z – ciśnienie zasilania [Pa],
- p_w – ciśnienie cieczy na wlocie do łożyska [Pa],

a – średnica przewodu zasilającego [mm],

n – liczba doprowadzeń przypadających na jednostkę długości obwodu łożyska.

Przy ustaleniu warunków brzegowych (1a) uwzględniono spadek ciśnienia w przewodzie zasilającym (przepływ cieczy w przewodach zasilających odbywa się laminarnie) o postaci

$$p_z - p_w = \frac{8\eta QL}{\pi a^4}$$

oraz wyrażenia natężenia przepływu q_w przypadającego na jednostkę długości obwodu łożyska otrzymane stosując warunek ciągłości strugi oraz wyrażenia na grubość warstwy oleju [Bicadze 1984; Hebda i in. 1975]:

$$q_w = \frac{\pi a^4 n}{8\eta L}\left(p_z - p_w\right) = -\frac{h^3}{6\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_w ,$$

gdzie:

Q – natężenie przepływu cieczy

η – współczynnik lepkości cieczy smarującej .

Analityczne wyznaczenie rozkładu ciśnienia oleju

Równanie (1) po uwzględnieniu zależności $\varepsilon = \frac{e}{c}$ oraz (2) można zapisać w następującej postaci:

$$P_{zz}(x,z) + P_{xx}(x,z) + \frac{3\varepsilon \sin\left(\frac{x}{R}\right)}{R\left(1 - \varepsilon \cos\frac{x}{R}\right)} P_x(x,z) = 0$$

Po rozdzieleniu zmiennych wedle zależności

$P(x,z) = A(x)B(z)$

$P_x = A'(x)B(z),$

$P_{xx} = A''(x)B(z),$

$P_z = A(x)B'(z),$

$P_{zz} = A(x)B''(z)$

równanie przedstawia się następująco:

$$A(x)B''(z)+A''(x)B(z)+\frac{3}{h(x)}h'(x)A'(x)B(z)=0 \qquad (3).$$

Otrzymane równanie można podzielić stronami przez wyrażenie $A(x)B(z)$ przekształcając w ten sposób równanie różniczkowe (1) o pochodnych cząstkowych na układ dwóch równań różniczkowych liniowych zwyczajnych:

$$\begin{cases} \dfrac{B''(z)}{B(z)}=K^2 & (4)\\ \dfrac{A''(x)}{A(x)}+\dfrac{A'(x)}{A(x)}f(x)=-K^2 & (5)\end{cases}$$

gdzie:

$$f(x)=\frac{3\varepsilon\, sin\left(\frac{x}{R}\right)}{R\left(1-\varepsilon\, cos\frac{x}{R}\right)}.$$

Równanie (4) prowadzi do rozwiązania

$$B(z)=\begin{cases} C_1 z+C_2, & gdy \quad K^2=0\\ C_1e^{Kz}+C_2e^{-Kz}, & poza\end{cases},$$

Gdzie wartości stałych C_1 i C_2 należy wyznaczyć z warunków brzegowych.
Natomiast równanie (5) wymaga pewnych uproszczeń zaproponowanych poniżej:
Rozważmy nowa funkcję

$$T(x)=\frac{A'(x)}{A(x)}, \qquad (6)$$

zatem

$$T'(x)=\frac{A(x)A''(x)-A'^2(x)}{A^2(x)}=\frac{A''(x)}{A(x)}-\left(\frac{A'(x)}{A(x)}\right)^2.$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{A''(x)}{A(x)}=T'(x)+T^2(x) \qquad (7)$$

Zależności (6) i (7) pozwalają na przekształcenie równania (5) na równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu typu Riccatiego o następującej postaci:

$$T'(x)+T^2(x)+T(x)f(x)=-K^2 \tag{8}$$

Zauważmy, że na mocy warunku przedstawianym w [1],[2],[4] zachodzi tożsamościowo

$$3\varepsilon \sin\frac{x}{R}=-KR(1-\varepsilon\cos\frac{x}{R}), \tag{8a}$$

zatem funkcja

$$T_0=\frac{1}{x+C_3}$$

jest całką szczególna równania (8), przy czym całka ogólna przedstawia się następująco:

$$T(x)=\frac{1}{x+C_3}+\frac{1}{u(x)}. \tag{9}$$

Wstawiając rozwiązanie ogólne (9) do równania (8), po uproszczeniach otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe

$$u'(x)-\left(\frac{2}{x+C_3}+f(x)\right)u(x)=1 \tag{10}$$

Rozwiązaniem jednorodnego równania adekwatnego do równania (10) stanowi funkcja

$$u_0(x)=C_4(x+C_3)^2\left(1-\varepsilon\cos\frac{x}{R}\right)^3.$$

Po uzmiennieniu stałej wstawiając do równania (10) otrzymujemy równanie

$$C_4'(x)=\frac{1}{(x+C_3)^2\left(1-\varepsilon\cos\frac{x}{R}\right)^3},$$

stąd

$$C_4(x)=\int\frac{1}{(x+C_3)^2\left(1-\varepsilon\cos\frac{x}{R}\right)^3}dx=\frac{K^4R^2}{9\varepsilon^2}\int\frac{1}{\sin^2\frac{x}{R}\left(1-\varepsilon\cos\frac{x}{R}\right)}=\frac{K^4R^3}{18\varepsilon^2(1+\varepsilon)}\int\frac{(1+t^2)^2}{t^2(t^2+a)}dt$$

Ostatnie przekształcenia całki otrzymano na podstawie warunku (8a) podstawiając

$$tg\frac{x}{2R}=t\,,$$

przy czym

$$a=\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}. \tag{11}$$

Po obliczeniu powyższej całki otrzymujemy

$$C_4(x)=\frac{K^4R^3}{9(1-\varepsilon)}\left[\frac{1+\varepsilon\cos\frac{x}{R}}{\sin\frac{x}{R}}-\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,arctg\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\,tg\frac{x}{2R}\right)\right] \tag{12}$$

Wobec tego rozwiązanie ogólne równania (10) zapisuje się następująco:

$$u(x)=\frac{K^4R^3}{9(1-\varepsilon)}(x+C_3)^2\left(1-\varepsilon\cos\frac{x}{R}\right)^3\left[\frac{1+\varepsilon\cos\frac{x}{R}}{\sin\frac{x}{R}}-\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,arctg\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\,tg\frac{x}{2R}\right)+C_4\right].$$

Stąd otrzymujemy funkcyjną postać wyrażenia (6)

$$T(x)=\frac{1}{x+C_3}+$$

$$+\frac{9(1-\varepsilon)}{K^4R^3(x+C_3)^2\left(1-\varepsilon\cos\frac{x}{R}\right)^3\left[\frac{1+\varepsilon\cos\frac{x}{R}}{\sin\frac{x}{R}}-\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,arctg\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\,tg\frac{x}{2R}\right)+C_4\right]}.$$

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie drugiego równania układu (5) o postaci

$$A(x)=exp\left\{\int\left(\frac{1}{x+C_3}+\Psi_{R,\varepsilon}(x)\right)dx\right\}=(x+C_3)\,exp\left\{\int\Psi_{R,\varepsilon}(x)dx\right\}$$

gdzie:

$$\Psi_{R,\varepsilon}(x)=\frac{9(1-\varepsilon)}{K^4R^3(x+C_3)^2\left(1-\varepsilon\cos\frac{x}{R}\right)^3\left[\frac{1+\varepsilon\cos\frac{x}{R}}{\sin\frac{x}{R}}-\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,arctg\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\,tg\frac{x}{2R}\right)+C_4\right]}$$

Podsumowując powyższe rozważania ogólną postać funkcji ciśnienia P(x,z) można zapisać następująco:

$$P(x,z) = p_0 + C_1 z + C_2 + (x + C_3)\sum_{K=1}^{\infty}(C_{1K} e^{Kz} + C_{2K} e^{-Kz}) exp\left\{\int \Psi_{R,\varepsilon}(x)dx\right\}.$$

Gdzie:

$$C_1 = \frac{3\pi a^4 n(p_z - p_0)}{4c^3 L\left(1 + \frac{3\pi a^4 n}{8c^3}\right)},$$

$$C_2 = \frac{3\pi a^4 n(p_z - p_0)}{8c^3 + 3\pi a^4 n},$$

$$C_3 = \frac{9\pi a^4 n(p_z - p_0)}{16c^3 L\left(1 + \frac{3\pi a^4 n}{8c^3}\right)\left(1 + \frac{3\pi a^4 n}{4c^3}\right)},$$

$$C_{1K} = \frac{9\pi a^4 nR\varepsilon(p_z - p_0)}{16c^3 L\left(1 + \frac{3\pi a^4 n}{8c^3}\right)\Psi_{R,\varepsilon}\left(\frac{2KL}{R}\right)},$$

$$C_{2K} = \frac{6\pi a^4 nR^3\varepsilon^3(p_z - p_0)\Psi_{R,\varepsilon}\left(\frac{2KL}{R}\right)}{c^3(1 + \frac{2KL}{R}\Psi_{R,\varepsilon}\left(\frac{2KL}{R}\right) + C_{1K}\, exp\left\{\Psi_{R,\varepsilon}\left(\frac{2KL}{R}\right)\right\}}.$$

Bibliografia

Bicadze A.W. 1984. Równania fizyki matematycznej. PWN, Warszawa.

Hebda M., Wachał A., Kozłowiecki H., Przustek J. 1975. Współczesne metody obliczania parametrów pracy łozysk mechanizmu korbowego silników spalinowych. Trybologia, Silniki spalinowe, 2. Warszawa.

Kyureghyan K. 2002. Theoretical calculation of the size of an oil slit in a transverse sliding bearing. Mathematical methods in agriculture.Abstract,11.Wyd AR, Lublin.

Piekarski W. 1994. Wybrane problemy diagnostyki ciagników rolniczych w aspekcie doskonalenia ich eksploatacji. Wyd AR, Lublin.

ANALYTICAL DEPENDENCE FOR DETERMINING PRESSURE IN HYDROSTATIC LATERAL FRICTION BEARING

Summary

The paper presents analytic solution of the Reynolds equation intended to determine the theoretical oil pressure distribution inside a lateral friction bearing. The generalised Reynolds equation (with given boundary conditions and the function of bearing wear) has been simplified (Riccati equation), and ultimate analytic solution has been given.

Key words: równanie Riccatiego, łożysko poprzeczne ślizgowe, smarowanie hydrodynamiczne. Reynolds equation, Riccati equation, lateral friction bearing, hydrodynamic lubrication