

Jerzy Detyna
Instytut Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn
Politechnika Wrocławska

STATYSTYCZNE MODELE PROCESU SEPARACJI CZĄSTEK W WARUNKACH ZMIANY KĄTA NACHYLENIA SITA

Streszczenie

Dla analizy rozkładów gęstości prawdopodobieństwa zaproponowano opisaną wcześniej entropię informacyjną Shannona. W odniesieniu do analizowanych rozkładów jej wartość wiernie oddaje poprzeczną dynamikę separowanych cząsteczek.

Słowa kluczowe: entropia, probalistyka, proces separacji, nachylenie sita

Wprowadzenie

Zjawiska i procesy powszechnie występujące w przyrodzie z reguły nie są podporządkowane żadnym (lub prawie żadnym) regułom deterministycznym. Procesy o charakterze przyczynowo-skutkowym występują sporadycznie, natomiast w stosunku do zjawisk występujących w rzeczywistości stosowane są bardzo często deterministyczne uproszczenia.

Pod koniec XIX wieku powstała i niezwykle szybko rozwijała się mechanika opierająca się na fundamencie statystycznym. Mechanika statystyczna stała się bardzo szybko teoretyczną podstawą opisu własności płynów oraz interpretacji zjawisk cieplnych. W analizach historycznych i filozoficznych związanych z fizyką, mechanika statystyczna jest postrzegana jako największe osiągnięcie pozwalające na opis świata materii, na opis zjawisk mechanicznych zachodzących w układach złożonych z dużej liczby cząstek [Farmer 1982].

Do procesów, które trudno jest ująć w ramy mechaniki klasycznej (deterministycznej) należy niewątpliwie proces rozdzielczy, który jest realizowany podczas ruchu cząstek mieszaniny w nieciągłych układach fizycznych. Analizę czynnikową ruchu cząstek na sitach można prowadzić metodami deterministycznymi [Bartlett 1975; Devaney 1989; Gleick 1987]. Jednakże ze względu na quasi-ergodyczny charakter procesu separacji uzyskane tą drogą modele zawierają zbyt wiele uproszczeń.

Jerzy Detyna

Alternatywę dla ww. metod może stanowić modelowanie opierające się na kanonie probabilistycznym. Słuszność wyboru tej metody potwierdzono już w literaturze [Detyna 2000; Hyde 1975; Johnson, Kotz 1970]. Otrzymane tą drogą modele z dużą dokładnością (wysokie współczynniki determinacji R^2) oddają powiązania wielu różnych czynników na sprawność procesu separacji.

W niniejszej publikacji przedstawiono próbę wprowadzenia metod statystycznych do modelowania i badania procesów rozdzielczych występujących na granicy elementu dyskretnego (np. sita).

Układy ergodyczne

Deterministyczne sposoby modelowania układów dynamicznych mają ograniczone możliwości zastosowań. Wynika to wprost z liczby elementów danego układu: nie można obserwować wszystkich ich podstawowych składników, a także nie jest możliwe rozwiązanie ogromnej liczby równań deterministycznych ruchu związanych z ich dynamiką. Dlatego też takie układy powinny być badane w sposób przybliżony z wykorzystaniem praw statystycznych.

Można sobie jednak postawić pytanie dotyczące granic skuteczności takich metod. Próba odpowiedzi została podjęta przez Boltzmann. Wprowadził on pojęcie ergodyczności jako cechy złożonych systemów, które zachowują się w sposób statystyczny. W następnej kolejności sformułował hipotezę chaosu molekularnego, według której badane przez fizykę statystyczną porcje gazów i cieczy są ergodyczne dlatego, że na poziomie mikroskopowym ruch ich składników jest odpowiednio chaotyczny.

Matematycy na początku bardzo krytycznie odnieśli się do tak sformułowanej hipotezy ergodycznej. Podstawę ku temu dawały dowody mówiące o tym, że trajektoria układu nie może przechodzić przez wszystkie punkty wielowymiarowej przestrzeni fazowej. W takim właśnie klimacie dyskusyjnym powstała w 1912 roku hipoteza quasi-ergodyczna, według której trajektoria układu w odpowiednio długim czasie zbliża się dowolnie blisko do każdego punktu przestrzeni fazowej położonego na powierzchni stałej energii całkowitej [Barlett 1975; Gleick 1987].

Statystyczna interpretacja pojęcia entropii

Fizyczne znaczenie drugiej zasady termodynamiki zostało wyjaśnione dzięki zastosowaniu rachunku prawdopodobieństwa do analizy zjawisk termodynamicznych. Identyczny stan makroskopowy układu (zbioru dużej ilości cząstek) może być realizowany za pomocą różnych mikrostanów cząsteczek. Liczba tych różnych

mikrostanów P realizujących dany stan makroskopowy zespołu określa jego termodynamiczne prawdopodobieństwo [Devaney 1989].

Boltzmann jako pierwszy przedstawił entropię jako miarę danego stanu termodynamicznego:

$$S = f(P) \quad (1)$$

gdzie $f(P)$ jest funkcją dla układu znajdującego się w równowadze statycznej, składającego się ze stałej liczby cząstek.

Funkcyjna zależność z punktu widzenia fenomenologicznego musi spełniać warunek addytywności entropii, stąd zależność (1) przyjmuje ostateczną postać:

$$S = k \ln P \quad (2)$$

gdzie k jest stałą Boltzmann.

W literaturze spotkać można także inne interpretacje pojęcia „entropia” [Bartlett 1975; Dorfman 2001; Farmer 1982]. Istotną rolę w metodach statycznych odgrywa entropia informacyjna. Pojęciu temu nadał sens C. Shannon, który w 1948 roku wykorzystał miarę entropii probabilistycznej do analizy sygnałów w sieciach telekomunikacyjnych.

Jeżeli dokonamy uogólnienia informacji jednego zdarzenia na informację zawartą w całym zbiorze utożsamionym z przestrzenią probabilistyczną to wartość oczekiwana

$$E(D) = -\sum_i p_i \log p_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

jest miarą entropii tego doświadczenia. Tak określona entropia zmiennej losowej jest miarą nieokreśloności i stopnia nieuporządkowania sytuacji, elementów lub stanów znajdujących się w pewnym zbiorze przeliczalnym.

Metodyka badań niestabilności poprzecznej separowanych cząstek

Badania zrealizowano na stanowisku badawczym, którego głównym elementem było sito żaluzjowe. Jako badaną zmienną losową przyjęto masę ziaren w 50 punktach pomiarowych pod sitem, którą to później wykorzystano do budowy modelu. W niniejszej publikacji przeprowadzono próbę wprowadzenia entropii [Detyna 2000; Farmer 1982] jako miary niestabilności poprzecznej separowanej

masy na sicie, które ulega przechyłom poprzecznym. W niniejszych badaniach w odniesieniu do dwuwymiarowej zmiennej losowej wykorzystano możliwości wynikające z niezależności realizowanych zdarzeń (względem długości i szerokości sita). Stąd właśnie wyłoniła się możliwość badania niestabilności w oparciu o poprzeczny rozkład brzegowy (tab. 1). W oparciu o zebrany i uporządkowany materiał dla trzech kątów pochylenia poprzecznego kosza sitowego (0° , 5° , i 10°) wyznaczono parametry teoretycznych rozkładów prawdopodobieństwa. Do konstrukcji niniejszego modelu wykorzystano rozkład Beta, którego funkcja gęstości prawdopodobieństwa opisana jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \text{ lub } x > 1 \end{cases} \quad (4)$$

Tabela 1. Przykładowe dane do modelowania po wstępnym znormalizowaniu wartości masy przesianych cząstek według formuły $\hat{x}_i = \frac{x_i}{\bar{x}}$ (dla kąta pochylenia poprzecznego kosza sitowego 0°)

Table 1. Example-data to modeling after initial standardizing values of the mass of sieved particles according to the formula $\hat{x}_i = \frac{x_i}{\bar{x}}$ (for the angle of the transverse inclination sieve 0°)

	Numer sekcji sita żaluzjowego				
	1	2	3	4	5
1	0,21	0,34	0,31	0,27	0,15
2	0,62	1,45	1,28	1,24	0,47
3	1,18	2,74	2,85	2,65	0,81
4	1,29	4,46	3,94	3,68	1,12
5	0,92	2,60	2,26	2,57	0,58
6	0,32	1,26	1,59	1,45	0,31
7	0,15	0,69	1,12	0,77	0,15
8	0,07	0,30	0,64	0,30	0,07
9	0,03	0,11	0,27	0,12	0,04
10	0,01	0,05	0,12	0,05	0,01
Wartości brzegowe	4,80	14,01	14,39	13,09	3,71

Wyniki badań i wnioski

Wyznaczone parametry dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu Beta przedstawiono w tabeli 2. Otrzymane współczynniki umożliwiły sporządzenie wykresów dla funkcji gęstości empirycznej i teoretycznej (rys. 1).

Tabela 2. Wyznaczone wartości parametrów funkcji gęstości rozkładu Beta dla znormalizowanych wartości masy przesianych cząstek oraz obliczone odpowiednio dla nich wartości entropii

Table 2. Designate values of parameters of density function of the distribution Beta for values of the mass of sieved particles and calculated (adequately) values of the entropy

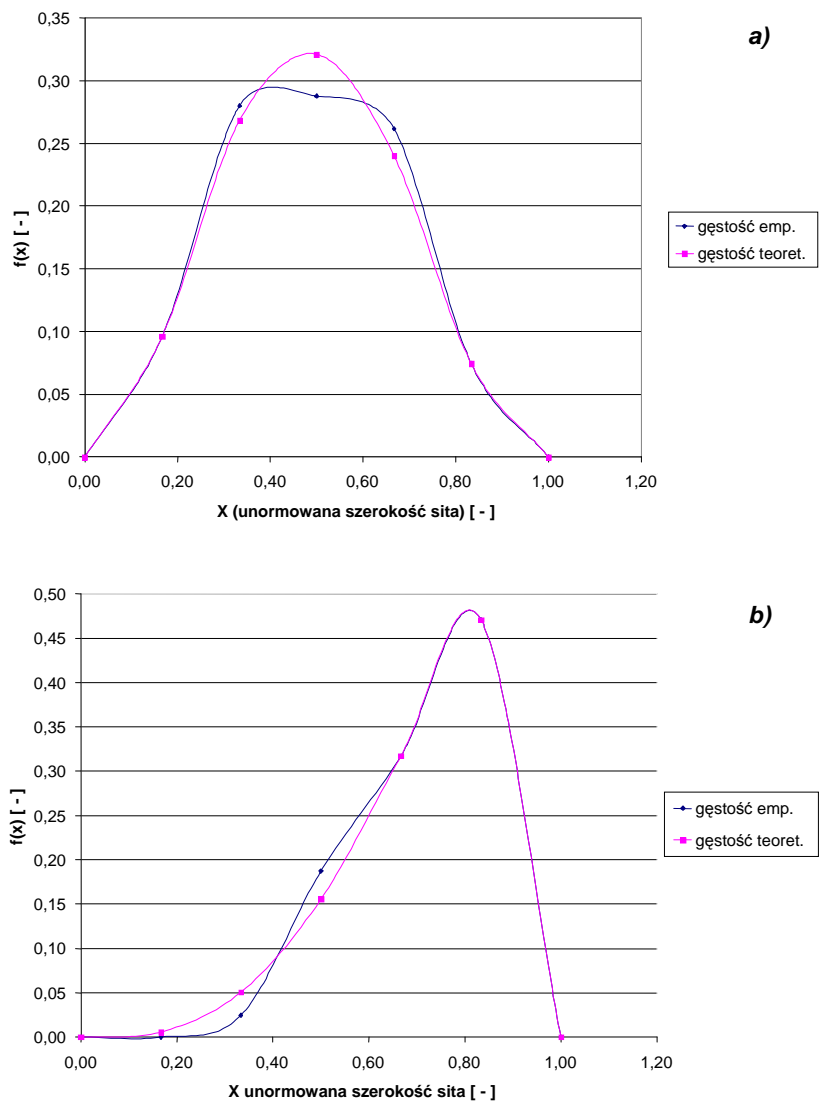
Wyszczególnienie	Kąt nachylenia kosza sitowego		
	0°	5°	10°
parametr α	2,276279	3,063237	3,359512
parametr β	2,410847	1,702363	1,136438
wartość entropii S	- 0,177805	- 0,258847	- 0,439099

Dla wszystkich czterech modeli obliczono wartość entropii rozkładu Beta w oparciu o formułę:

$$S = \int_0^1 f(x) \ln f(x) dx \quad (5)$$

Wyniki wartości entropii zgromadzono w tab. 2. Wszystkie obliczenia przeprowadzono w programach *Excel*[®] 2003 firmy *Microsoft*[™] oraz *Mathematica*[®] firmy *Wolfram Research*[™].

Wyznaczone modele w postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu Beta (oraz odpowiadających im dystrybuant) z wysokimi wartościami współczynnika determinacji przybliżają się do wartości empirycznych. Określone w wyniku modelowania parametry rozkładów (α i β) pozwalają na obliczenie wartości entropii rozkładu Beta. W niniejszej publikacji posługujemy się opisaną wcześniej (5) entropią informacyjną Shannona. W odniesieniu do analizowanych rozkładów wartość tej miary wiernie oddaje ich równomierność.



Rys. 1. Empiryczna i teoretyczna postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu Beta dla poprzecznego (względem kierunku ruchu cząstek) kąta nachylenia kosza sitowego: a) 0°, b) 10°

Fig. 1. The empirical and theoretical form of the probability density function of the distribution Beta for transverse-angle of inclination (in relation to the direction motion of particles) of the ethmoidal case a) 0°, b) 10°

Stąd miara ta doskonale nadaje się do charakteryzowania zmian dynamiki poprzecznej separowanych cząstek. Dla rozkładu równomiernego, kiedy parametry $\alpha = \beta = 1$ wartość tak obliczonej entropii osiąga maksimum w punkcie 0. Im bardziej wartość ta oddala się od maksimum to analizowany rozkład jest mniej równomierny. Dla analizowanych przypadków widać wzrost nierównomierności rozkładu wraz ze zwiększeniem kąta pochylenia. Obliczone wartości (tab. 2) pozwoliły wyznaczyć funkcję regresji, uwzględniającą kąt pochylenia kosza sitowego γ :

$$S = -0,0261 \cdot \gamma - 0,1613 \quad R^2 = 0,9541 \quad (6)$$

Bibliografia

- Bartlett J.H. 1975. *Classical and Modern Mechanics*, University of Alberta Press.
- Detyna J. 2000. *Analiza wpływu geometrii sita żaluzjowego na przebieg procesu czyszczenia ziarna w kombajnach zbożowych pracujących w warunkach terenów nachylonych*. Rozprawa doktorska, Wrocław.
- Devaney R.L. 1989. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin Cummings, Menlo Park.
- Dorfman J.R. 2001. *Wprowadzenie do teorii chaosu w nierównowagowej mechanice statystycznej*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa.
- Farmer J.D. 1982. *Information Dimension and the Probabilistic Structure of Chaos*, *Zeitschrift für Naturforschung*, nr 37a (1304).
- Gleick J. 1987. *Chaos: Making a New Science*, Viking Penguin, New York.
- Heyde C.C. 1975. *Statistical Distributions in Scientific Work*, t.1, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Boston.
- Johnson N.L., Kotz S. 1970. *Distributions in Statistics*, vol. 3, *Continuous Univariate Distributions*, Houghton Mifflin Company, Boston.

Jerzy Detyna

**STATISTICAL MODELS OF THE SEPARATION PROCESS
OF THE PARTICLES CONDITIONED OF CHANGE
OF THE ANGLE OF INCLINATION OF THE SIEVE**

Summary

For analysis of distributions of the density of the probability we proposed described the Shannon's informational entropy. With reference to analyzed distributions the value of this measure faithfully gives the transverse dynamics of separated particles.

Key words: entropy, probabilistic methods, separation process, inclination of the sieve