

Zbigniew Dworecki, Adam Krysztofiak, Mariusz Łoboda  
Instytut Inżynierii Rolniczej  
Akademia Rolnicza w Poznaniu

## METODA OBLICZANIA MASOWYCH MOMENTÓW BEZWŁADNOŚCI MASZYN ROLNICZYCH

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono metodę szacowania masowych momentów bezwładności maszyn rolniczych. Bryłę maszyny można odwzorować za pomocą niewielkiej liczby prostych brył geometrycznych o znanych masach. Po obliczeniu momentów bezwładności tych brył można, korzystając z twierdzenia Steinera, obliczyć momenty bezwładności całej maszyny względem układu współrzędnych związanego ze środkiem ciężkości maszyny.

**Słowa kluczowe:** masowe momenty bezwładności, maszyny rolnicze, model bryłowy

### Wstęp

Znajomość masowych momentów bezwładności części maszyn jest konieczna do obliczeń różnych wielkości już w trakcie konstrukcji tych maszyn. Poznanie masowych momentów bezwładności maszyn może wpłynąć na ich eksploatację. Wielkość momentów bezwładności decyduje o siłach dynamicznych i drganiach maszyn. Masowe momenty bezwładności są parametrami występującymi w mechanicznych modelach dynamicznych maszyn, służących do obliczeń częstotliwości drgań własnych. Identyfikacja momentów bezwładności, czyli ustalenie ich wartości liczbowej, sprawia dużo więcej trudności niż identyfikacja innych parametrów modeli, takich jak masy czy sztywności.

Autorzy zajmujący się modelowaniem matematycznym ciągników i maszyn rolniczych oraz wykorzystujący w swoich modelach momenty bezwładności, podając ich wartości nie przytaczają ani sposobu przeprowadzenia pomiaru, ani metody obliczeń. Sakai i in. [1999] przyjmuje do swoich obliczeń, między innymi, masę ciągnika wynoszącą 988 kg (prawdopodobnie mały ciągnik japoński - autor nie podaje nazwy) oraz moment bezwładności względem osi poziomej, prostopadłej do kierunku jazdy, wynoszący  $700 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , która to wartość jest możliwa, ale mało wiarygodna. Kumar i in. [2001] podają momenty bezwładności zespołów ciągnika. W związku z tym, że podane przez autorów momenty bezwładności korpusu cią-

gnika względem osi pionowej i osi poziomej, prostopadłej do kierunku jazdy, są takie same, należy wnioskować, że zostały obliczone na podstawie modelu ciągnika. Autorzy nie podają sposobu modelowania i nie przedstawiają przyjętego modelu. Zakładając, że momenty bezwładności zostały jednak zmierzone, to żaden z autorów nie przedstawił sposobu pomiaru. Można więc stwierdzić, że wartości momentów bezwładności ciągnika i jego części, podawane przez autorów, którzy wykorzystują je do swoich obliczeń, są mało wiarygodne.

### **Eksperymentalne metody wyznaczania masowych momentów bezwładności**

Masowe momenty bezwładności maszyn można wyznaczyć różnymi metodami. Metody te polegają na pomiarze innych wielkości, które zależą od momentów bezwładności a struktura tej zależności jest dokładnie znana. Metoda wahadła fizycznego polega na zawieszeniu maszyny na poziomej osi i pomiarze częstotliwości jej wahań. Powtórne zawieszenie maszyny, takie, żeby oś obrotu maszyny była równoległa do pierwszej osi obrotu i leżała na linii biegnącej od pierwszego punktu zaczepienia i przechodzącej przez środek ciężkości umożliwi obliczenie momentu bezwładności maszyny względem osi poziomej przechodzącej przez środek ciężkości.

Do wyznaczenia momentów bezwładności można również zastosować metodę podwieszenia trójpunktowego. Metoda ta polega na podwieszeniu maszyny na trzech symetrycznie zaczepionych cięgnach lub ułożeniu maszyny na blacie podwieszonym na cięgnach i wzbudzeniu drgań skrętnych maszyny lub maszyny z blatem. Znając moment bezwładności blatu, jego masę, długość cięgien i ich rozstaw, masę maszyny oraz mierząc częstotliwość drgań skrętnych, można obliczyć moment bezwładności maszyny względem osi pionowej.

Inną metodą wyznaczenia momentów bezwładności jest zawieszenie maszyny na jednym pręcie o znanej stałej sprężystości skrętnej. Konieczne tu jest wykonanie jakiegoś uchwytu powodującego sztywne połączenie maszyny z prętem. Pomiar częstotliwości drgań skrętnych takiego układu umożliwi wyznaczenie momentu bezwładności maszyny względem osi pionowej.

Wymienione metody wymagają jednak odpowiedniego zawieszenia maszyny. Aby wyznaczyć momenty bezwładności wokół różnych osi, maszyna musi być różnie zawieszana. Jest to dość kłopotliwe i powoduje, że badacze rzadko korzystają z tych eksperymentalnych metod, przyjmując wartość momentów na podstawie własnego doświadczenia lub niepewnej literatury.

### **Proponowana metoda szacowania masowych momentów bezwładności**

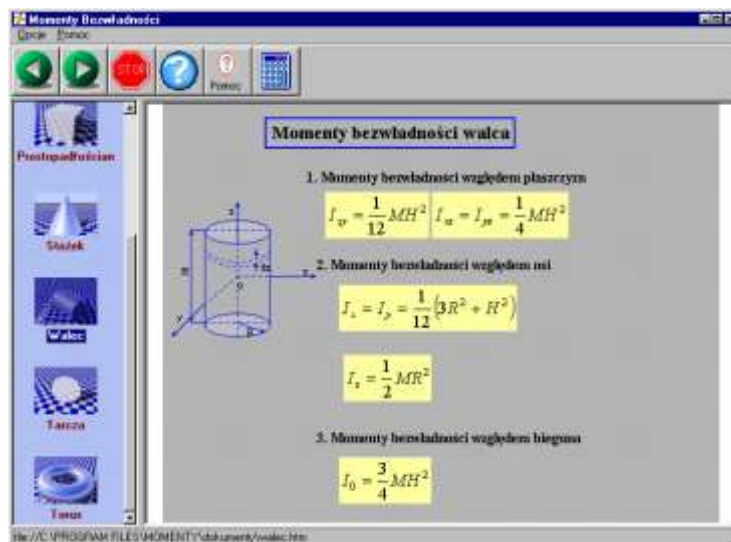
Wartość momentów bezwładności prostych brył geometrycznych można obliczyć znając ich wymiary, masę oraz zakładając równe rozłożenie masy w ich objętości (jednorodność). Wartość tych momentów można obliczyć względem środka masy, płaszczyzn i osi przechodzących przez ten środek. Dodatkowo, korzystając z twierdzenia Steinera, można obliczyć momenty bezwładności względem innych punktów, płaszczyzn i osi nie przechodzących przez środki ciężkości brył.

W proponowanej metodzie można wyróżnić następujące etapy:

1. Podział maszyny na zespoły i części o kształtach zbliżonych do prostych brył geometrycznych i masie rozłożonej proporcjonalnie do objętości. Przy tym podziale można kierować się geometrią i możliwością zważenia lub obliczenia masy.
2. Obliczenie momentów bezwładności brył względem układów związanych z ich środkami ciężkości.
3. Obliczenie momentów bezwładności brył względem układu związanego ze środkiem ciężkości całej maszyny.
4. Zsumowanie momentów bezwładności wszystkich brył.

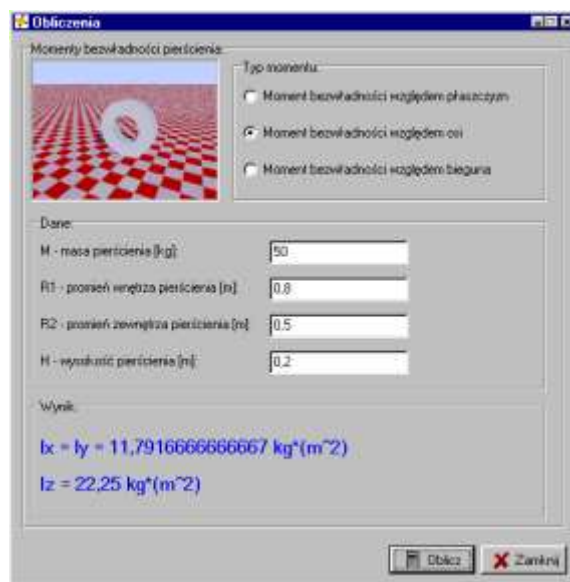
W Instytucie Inżynierii Rolniczej Akademii Rolniczej w Poznaniu zbudowano system komputerowy, umożliwiający obliczanie masowych momentów bezwładności prostych brył geometrycznych (etap 2), których można użyć do zbudowania modeli geometrycznych różnych maszyn. Bryłami tymi są: prostopadłościan umożliwiający obliczenia także prostokątnej tarczy, kula, tarcza okrągła z której wyodrębniono dodatkowo walec, pierścień, stożek i torus.

Po uruchomieniu programu użytkownik ma do wyboru z lewej strony ekranu ikony poszczególnych brył. Ponieważ program będzie wykorzystywany również do celów dydaktycznych dlatego prezentuje zależności, na podstawie których są obliczane wartości momentów. Przykładowo przedstawiono zależności dla walca (rys. 1). Po włączeniu ikony „z kalkulatorem” i wyborze rodzaju momentów (względem płaszczyzn, względem osi lub względem bieguna) oraz podaniu wartości liczbowych wymaganych danych system oblicza wskazane momenty (rys. 2). System traktuje bryły jak ciała jednorodne i żąda wprowadzenia wymiarów oraz masy brył.



Rys. 1. Okno programu przedstawiające zależności do obliczenia masowych momentów bezładności walca

Fig. 1. Window of moments of inertia of cylinder formulas



Rys. 2. Okno wprowadzania danych i obliczania

Fig. 2. Window to introducing data and calculations

## Momenty bezwładności przykładowego pługa

Przedstawioną metodę szacowania momentów bezwładności maszyn rolniczych zastosowano do oszacowania momentów siedmioskibowego pługa U043/1. Pług ten zważono a położenie jego środka ciężkości wyznaczono podwieszając pług dwukrotnie i zaznaczając punkt przecięcia się linii pionów. Z pługa wyodrębniono następujące elementy:

1. Ramę, którą reprezentowała płyta prostokątna
2. Lemiesze z odkładnicami zastąpione również płytami
3. Słupice o kształcie walca
4. Koło kopiujące również zastąpione walcem
5. Układ zawieszenia pługa zastąpiony płytą trójkątną.

Elementy możliwe do demontażu (lemiesze z odkładnicami, słupice, koło kopiujące) zważono a masę układu zawieszenia obliczono mnożąc objętość materiału przez ciężar właściwy. Masę ramy ustalono odejmując od masy pługa, masę wszystkich pozostałych elementów. Po obliczeniu momentów bezwładności poszczególnych elementów względem ich środków ciężkości i osi przechodzących przez te środki oraz zmierzeniu odległości ich środków ciężkości od środka ciężkości całego pługa obliczono momenty bezwładności pługa. Wyniosły one:

- moment bezwładności względem środka ciężkości -  $470 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ,
- moment bezwładności względem osi zgodnej z kierunkiem jazdy -  $90 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ,
- moment bezwładności względem osi prostopadłej do kierunku jazdy -  $380 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ,
- moment bezwładności względem osi pionowej  $470 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ .

Błąd popełniony przy ustalaniu określonej wielkości jest różnicą pomiędzy wartością przyjętą a wartością rzeczywistą. W przypadku obliczania określonej wielkości na podstawie pomiarów wielu parametrów, dokładność z jaką przyjęto wartość tej wielkości zależy od dokładności pomiarów wszystkich parametrów oraz dokładności obliczeń. W związku z tym, że obliczeń momentów bezwładności dokonano na podstawie przyjętego modelu, więc błędy z jakimi te momenty zostały określone można tylko oszacować, przyjmując określone błędy modelu. Moment bezwładności całego pługa jest sumą momentów bezwładności poszczególnych brył modelu względem środka masy całej maszyny. Bryły i ich masy, za pomocą których zamodelowano pług zostały tak dobrane, aby położenie środka masy całego modelu bryłowego było zgodne z faktycznym położeniem środka masy pługa. Należy więc przyjąć, że środki masy poszczególnych brył modelu oraz ich masy są zgodne z modelowanymi zespołami i elementami pługa. Moment bezwładności każdej bryły modelu względem środka masy pługa jest sumą momentu bezwładności

bryły względem jej środka masy i tzw. składnika Steinera, będącego iloczynem masy bryły i kwadratu odległości środka masy bryły od środka masy układu. Jeżeli masy brył i położenie ich środków masy przyjęto prawidłowo, to należy przyjąć, że składnik Steinera nie jest obciążony istotnym błędem. Przy takich założeniach można przyjąć, że możliwy błąd popełniony przy ustalaniu momentów bezwładności ciągnika jest sumą błędów popełnionych przy ustalaniu momentów bezwładności brył modelu względem ich środków masy. Zakładając błędy w przyjętym kształcie brył zastępujących elementy pługa, można obliczyć różnice w momentach bezwładności. Procedura szacowania błędów jest dość żmudna. Z procedurą tą można zapoznać się w pracy Dworeckiego (2003), gdzie oszacowano błąd popełniony przy obliczaniu momentów bezwładności ciągnika. Błędy te nie przekroczyły 10% i z bardzo dużym prawdopodobieństwem można twierdzić, że w przypadku pługa szacunkowy błąd obliczeń będzie jeszcze mniejszy. Wskazuje na to „żadsze” rozłożenie masy pługa w porównaniu z ciągnikiem, co powoduje większy wpływ składników Steinera (nie obciążonych błędem) na momenty bezwładności części pługa względem środka ciężkości całego pługa.

### **Podsumowanie**

Znając położenie wyszczególnionych części i zespołów maszyn rolniczych zastąpionych prostymi bryłami, względem środka ciężkości całej maszyny, oraz znając momenty bezwładności tych części, można obliczyć, korzystając z twierdzenia a Steinera, momenty bezwładności całej maszyny.

Przedstawiony program będzie, w zamiarze autorów, częścią systemu obliczającego momenty bezwładności całej maszyny. Trwają prace nad częścią topologiczną systemu i stworzeniem przyjaznego interfejsu do wprowadzania danych o położeniu poszczególnych brył zastępujących wyodrębnione zespoły i części.

### **Bibliografia**

Dworecki Z. 2003. Badania drgań ciągnika z zawieszoną maszyną rolniczą w kontekście ich oddziaływania na operatora. *Inżynieria Rolnicza* nr 5(47): 86-89.

Kumar A., Mahajan P., Mohan D., Varghese M. 2001. Tractor Vibration Severity and Driver Health: a Study from Rural India. *Journal of Agricultural Engineering Research*. Vol. 80, No. 4: 313-328.

Sakai K., Aihara K. 1999. Bifurcation Structure of Vibrations in an Agricultural Tractor- Vibrating Subsoiler System. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. Vol. 9, No. 10: 2091-2098.

## **CALCULATIONS OF MOMENT OF INERTIA OF AGRICULTURAL MACHINES**

### **Summary**

Papers presents the method of calculation, helpful in valuation of agricultural machines moments of inertia. The machine may be recognised like the set of simply modules: cylinders, cuboid, cons etc., which mass are known. Calculation of moment of inertia of this modules and applying Steiner principle give principal moments of inertia whole agricultural machine.

**Key words:** moment of inertia, agricultural machine, module model