Sławomir Kurpaska, Maciej Sporysz
Katedra Inżynierii Rolniczej i Informatyki
Akademia Rolnicza w Krakowie

ODTWARZANIE PRZEBIEGU PROCESÓW CIĄGŁYCH NA PODSTAWIE ICH DYSKRETNYCH WARTOŚCI POMIAROWYCH

Streszczenie

W pracy przedstawiono metodę odtwarzania ciągłego przebiegu temperatury za pomocą wielomianu. Wykorzystano dane pomiarowe uzyskane z rejestracji temperatury otoczenia za pomocą automatycznego systemu pomiarowego. Na podstawie analizy stwierdzono, że wielomian stopnia szóstego najkorzystniej odtwarza przebieg analizowanej wielkości. Badano również, jak wpływa liczba obserwacji wielkości mierzonej na różnice między wielkością zmierzoną i odtwarzaną za pomocą wielomianu.

Słowa kluczowe: temperatura otoczenia, stopień wielomianu, liczba obserwacji

Wstęp

Nieustanny rozwój techniki i coraz powszechniejsza komputeryzacja naszego otoczenia powoduje, że z jednej strony potrafimy coraz dogłębniej poznawać otaczający nas świat, z drugiej zaś jesteśmy wręcz zalewani nadmiarem spływających informacji. Dlatego zasadne wydaje się być pytanie – czy można, a jeśli tak, to w jaki sposób, ograniczyć strumień danych nie tracąc przy tym pełnego obrazu monitorowanych zjawisk. Pewnych wskazówek dotyczących odstępów czasowych pomiędzy kolejnymi pomiarami dostarcza nam twierdzenie Shannona [Janiszowski 2002]. Z twierdzenia tego wynika, że jeśli z okresem Δt próbkowany jest pewien sygnał, to należy oczekiwać utraty części informacji o jego przebiegu.

Przykładem takiego problemu jest analiza danych rejestrowanych przez współczesne stacje pomiarowe, które zapisują monitorowane dane z różną częstotliwością. Powoduje to nagromadzenie w ciągu doby ogromnej liczby pomiarów, co dla czynników charakteryzujących się niewielką zmiennością i gwałtownością jest rzeczą zbędną. Pojawia się problem nie tylko z archiwizacją, ale również i z szybkim i łatwym dostępem do mierzonych wielkości. Czasowe przebiegi tych wielkości są niezbędne w analizie różnych procesów, np. przy określaniu zużycia ciepła w ogrzewanym obiekcie. Znalezienie funkcji odtwarzającej charakter zmienności zadanego czynnika powoduje uproszczenie archiwizacji, zaoszczędzenie obszaru zajmowanej pamięci i w razie potrzeby błyskawiczny dostęp do zgromadzonych danych [Rojek, Rojek 2004]. Jest to szczególnie ważne w dalszych pracach, np. przy opracowaniu analizy szeregów czasowych, modelu autoregresji [Uchida Frausto i in. 2003].

Stąd celem pracy jest przedstawienie metody pozwalającej odtworzyć przebieg zmienności procesów ciągłych w zależności od czasu. Opracowana metoda może zostać zastosowana do odtwarzania wolnozmiennych warunków klimatycznych wewnątrz obiektu (temperatura i wilgotność powietrza, temperatura gleby) jak i na zewnątrz (temperatura otoczenia).

Materiał i metoda

Niech funkcją f będzie szukana przez nas funkcja temperatury, wilgotności itp., w zależności od czasu. Zadaniem jest poszukiwanie funkcji F, która możliwie najdokładniej przybliży nam rzeczywistą funkcję f. Jednym z pierwszych pytań na jakie należy odpowiedzieć przy konstruowaniu przybliżenia, to problem, czy w punktach pomiarowych funkcje f i F mają mieć dokładnie takie same wartości, czy też dopuszczamy w nich możliwość różnicy. W pierwszym przypadku (interpolacja) otrzymany zostanie bardzo skomplikowany wzór funkcji F (np. wielomian wysokiego stopnia). Dlatego zasadnym jest postulat, by w wybranych punktach obydwie funkcje (rzeczywista i przybliżająca) mogły się nieznacznie różnić (aproksymacja). W zamian uzyskane zostanie znaczne uproszczenie wzoru funkcji przybliżającej. Na korzyść drugiego rozwiązania przemawia ponadto fakt, iż dane którymi dysponujemy, obarczone są jedynie błędem pomiarowym. Kolejnym zadaniem jest odpowiedni dobór wzoru aproksymującego. W analizowanym przypadku charakter zmienności temperatury w ciągu doby najlepiej oddają funkcje wielomianowe lub trygonometryczne. Można więc zdecydować się na aproksymację:

– wielomianową w postaci: $F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, lub

– trygonometryczną, jako: $F(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i \cos ix + b_i \sin ix \right)$.

Ponieważ podczas numerycznych obliczeń funkcje trygonometryczne i tak są przybliżane odpowiednimi wielomianami, więc zasadnym jest poszukiwać funkcję przybliżającą F w postaci wielomianu stopnia n:

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \tag{1}$$

Istnienie takiej funkcji F, przy zadanej, dowolnie małej dokładności ε, gwarantuje nam twierdzenie Weierstrassa [Fortuna i wsp. 1998]:
współczynniki wielomianu F dobieramy tak, by błąd, tzn. wyrażenie

$$G = \| f - F \| = \sum_{i=1}^{m} \left(f(x_i) - a_0 - a_1 x_i - \ldots - a_1 x_i^n \right)^2 \to \min \tag{2}$$

był możliwie najmniejszy. Z analizy matematycznej wiadomo, że błąd ten będzie minimalny gdy:

$$\begin{cases} \dfrac{dG}{da_0} = 0 \\ \dfrac{dG}{da_1} = 0 \\ \\ \dfrac{dG}{da_n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i + \ldots a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^n = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) \\ a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \ldots a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} = \sum_{i=1}^{m} x_i f(x_i) \\ \\ a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} + \ldots a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{2n} = \sum_{i=1}^{m} x_i^n f(x_i) \end{cases} \tag{3}$$

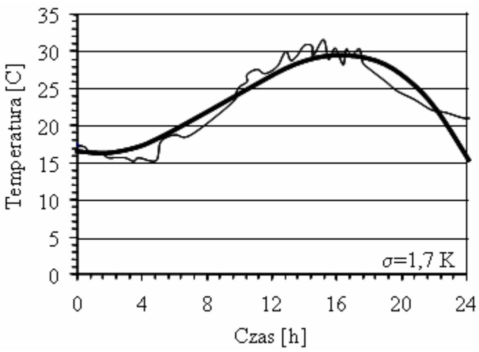
Powyższy układ można zapisać w postaci macierzowej $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Jeżeli liczba obserwacji m jest silnie większa od stopnia wielomianu wówczas zawsze istnieje możliwość rozwiązania powyższego układu równań ($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{b}$). Kolejną ważną kwestią jest ocena otrzymanego rozwiązania, tzn. w jakim stopniu krzywa aproksymacyjna oddaje charakter przebiegu zmienności funkcji przybliżanej. Jako kryterium zgodności można przyjąć np. błąd maksymalny, średni błąd kwadratowy, współczynnik determinacji R^2, współczynnik χ^2 (chi-kwadrat). W przeprowadzonych analizach do oceny zgodności między aproksymowanymi i zmierzonymi wartościami wykorzystano współczynnik χ^2 oraz średni błąd kwadratowy σ. W celu automatyzacji poszukiwania funkcji aproksymującej utworzony został program komputerowy, który w oparciu o współczynnik χ^2 w sposób automatyczny znajdował stopień wielomianu.

Wyniki i dyskusja

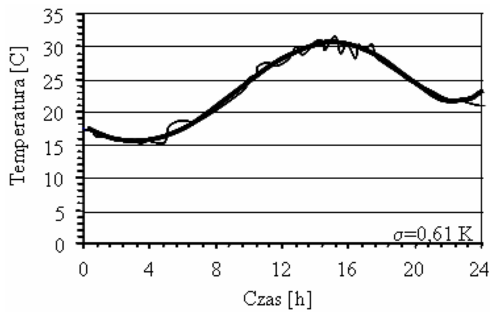
Do obliczeń wykorzystano dane zebrane i zarchiwizowane przez Komputerowy System Pomiarowy zainstalowany w obiekcie doświadczalnym na terenie Wydziału Agroinżynierii AR w Krakowie. Szczegółowy jego opis został przedstawiony w pracy [Kurpaska 2004]. Ogólna liczba zapisywanych (w cyklu całodobowym) danych wynosiła około 2880 pomiarów.

Stosując metodę aproksymacji średniokwadratowej należy również odpowiedzieć na pytanie: jak optymalnie dobrać stopień wielomianu aproksymacyjnego. Oczywiście można dowolną funkcję odtwarzać wielomianem stopnia zerowego, jednak takie przybliżenie nic nie mówi o zmienności obserwowanego procesu. Można kolejno zwiększać stopień wielomianu. W pewnych przypadkach wystarcza już zastosowanie wielomianu 3. stopnia, czasami nawet wielomiany wyższego stopnia nie dają zadawalających efektów. Teoretycznie, im wyższy stopień tym większa dokładność, jednak wraz z jego wzrostem rośnie znacząco koszt obliczeń, zaś nieuniknione błędy zaokrągleń powodują niekiedy niemożność znalezienia rozwiązania lub utratę jego jednoznaczności. Ponadto od pewnego momentu zwiększając stopień wielomianu nie uzyskuje się znaczącej poprawy rozwiązania. W literaturze [Fortuna i in. 1998] przyjmuje się, że aproksymację wielomianową stosuje się dla wielomianów stopnia nie większego niż 6. Na rys. 1 i 2 przedstawiono wpływ stopnia wielomianu na dokładność aproksymacji wielkości zmierzonej.



Rys. 1. Aproksymacja wielomianem stopnia 3

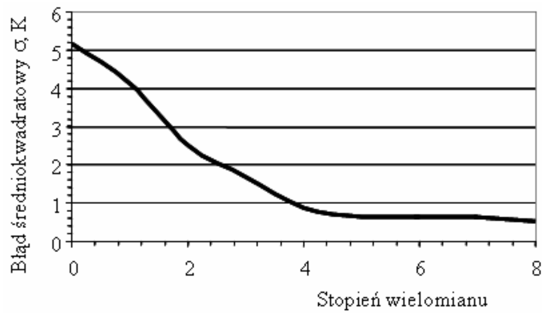
Fig. 1. Approximation with 3rd degree multinomial



Rys. 2. Aproksymacja wielomianem stopnia 6

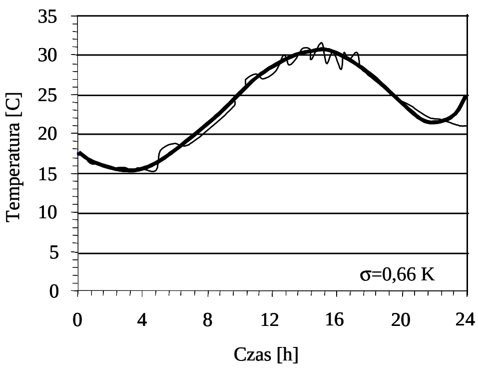
Fig. 2. Approximation with 6th degree multinomial

Z przeprowadzonej analizy wynika, że szósty stopień wielomianu jest najbardziej odpowiedni. Przebieg średniego błędu kwadratowego w zależności od stopnia wielomianu przedstawiono na rys. 3. Drugim ważkim pytaniem jest, czy w celach obliczeniowych korzystać z wszystkich dostępnych obserwacji (około 2880), czy też liczbę tę ograniczyć- a jeśli tak to w jakim stopniu. Dobre rezultaty uzyskano już przy wyborze 30 pomiarów w przeciągu całej doby mierzonych w równych odstępach czasowych, statystycznie korzystniej jednak wybierać 50 obserwacji. Zmniejsza to ryzyko popełnienia znaczących błędów.

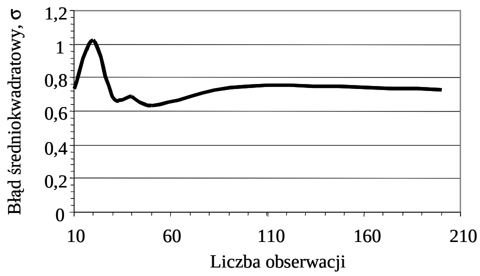


Rys. 3. Wpływ stopnia wielomianu na dokładność aproksymacji
Fig. 3. Effect of the multinomial degree on accuracy of approximation

Dalsze zwiększanie liczby próbek powiększa koszt numeryczny obliczeń i nie wpływa istotnie na poprawę dokładności rozwiązania. Na rys. 4 przedstawiono aproksymację mierzonych wartości na podstawie 100 pomiarów wielomianem stopnia szóstego. Na rysunku 5 przedstawiono przebieg błędu (σ) jako funkcję liczby obserwacji. Jak widać, zwiększanie liczby obserwacji powyżej 50 nie zmniejsza rozrzutu między wartością obliczoną i zmierzona.



Rys. 4. Aproksymacja wielomianem stopnia 6 na podstawie 100 pomiarów
Fig. 4. Approximation with 6th degree multinomial on the basis of 100 measured values



Rys. 5. Wpływ liczby pomiarów na dokładność aproksymacji
Fig. 5. Effect of the number of measurements on accuracy of approximation

Podsumowanie

Opracowana metoda pozwala w stosunkowo łatwy sposób odtwarzać przebieg zmienności procesów ciągłych za pomocą funkcji wielomianowych. Z przeprowadzonych analiz wynika, że najlepiej jest to czynić wielomianami stopnia szóstego. Umożliwia to w znaczący sposób ograniczyć liczbę przechowywanych danych (w rozpatrywanym przypadku z 2880 do zaledwie 7 współczynników wielomianu). Co za tym idzie istnieje możliwość bardzo szybkiego odczytania i przetworzenia zawartych w plikach archiwalnych danych – szczególnie przydatnych w dalszych analizach. Po drugie do wyznaczenia współczynników wielomianu aproksymacyjnego najkorzystniej jest czerpać informacje z 50 pomiarów. Przy tak dobranych parametrach aproksymacji średnia różnica pomiędzy temperaturą przybliżoną, a faktycznie zmierzoną w ciągu całej doby waha się w granicach 0,5 K, zaś średni błąd kwadratowy wynosi 0,62 K. Niestety w niektórych wypadkach, gdy zmienność odtwarzanego procesu jest bardzo duża, metoda okazuje się być zawodna. Wtedy należałoby szukać innych rozwiązań, np. zastosować funkcje sklejane.

Bibliografia

Fortuna Z, Macukow B, Wąsowski J. 1998. Metody numeryczne, WNT, Warszawa.

Janiszowski K. 2002. Identyfikacja modeli parametrycznych w przykładach. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa.

Kurpaska S., Latała H., Michałek R., Rutkowski K. 2004. Funkcjonalność zintegrowanego systemu grzewczego w ogrzewanych tunelach foliowych. PTIR, Kraków, ss. 118.

Rojek M, Rojek M. S. 2004. Modelowanie dobowej zmienności temperatury gleby i powietrza przy pomocy funkcji wielomianowych. Acta Agrophysica, 3(2), 367-373.

Uchida Frausto H., Pieters J. G., Deltour J. M. 2003. Modelling Greenhousse Temperature by means of Auto Regressive Models. Biosystems Engineering, 84(2), 147-157.

REPRODUCING THE PROGRESS FO CONTINUOUS PROCESSES, BASED ON DISCRETE MEASUREMENT VALUES

Summary

The paper presents the method of continuous reproduction of temperature run using a multinomial. Measuring data obtained during recording ambient temperature with an automatic measuring circuit. Based on the analysis, it has been found that the multinomial of sixth degree serves best for reproduction of the value being analysed. It was also investigated to find how the number of observations of measured value influences the difference between the measured values and those reproduced with the aid of multinomial.

Key words: ambient temperature, multinomial degree, number of observations