

Janusz Szyber
Katedra Podstaw Inżynierii
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

WPLYW NIEKTÓRYCH CZYNNIKÓW NA WYBOCZENIE SOSNY

Streszczenie

W publikacji analizowano wpływ na wyboczenie strzał sosny ich smukłości, modułu sprężystości, granicy proporcjonalności, wytrzymałości na ściskanie i mimośrodu siły ściskającej. Zaproponowano obliczanie smukłości grubizny strzał, bez pierwszego metra odziomka, takie jak dla stożka ściętego obciążonego od czoła osiową siłą ściskającą. Stwierdzono, że o utracie stateczności strzały przy obciążeniu koron śniegiem decyduje trwały moduł sprężystości przy ściskaniu wzdłuż włókien. Mimośrodowość obciążenia strzały istotnie zwiększa możliwość utraty stateczności strzały, nie zmieniając jednak wartości siły krytycznej.

Słowa kluczowe: wyboczenie strzały sosny, śniegołomy, smukłość strzał sosny

Wstęp

Problem wyboczenia strzał sosnowych związany jest ściśle z zagadnieniem szkód śniegowych – głównie śniegołomów. W przedstawionej pracy autor zajął się głównie wpływem na wyboczenie smukłości drzew, stałych sprężystych i wytrzymałościowych drewna oraz mimośrodu siły ściskającej.

Smukłość drzew

W słowniku [1996] możemy przeczytać następującą definicję smukłości: „...smukłość strzały – iloraz wysokości drzewa i jego pierśnicy, stanowiący miarę właściwości statycznych drzewa, determinujących stopień wrażliwości na niszczące działanie śniegu (okiść) i wiatru...”. Podobną definicję znajdujemy we współczesnym kursie dendrometrii [Bruchwald 1995] przy okazji omawiania smukłości brył, przy tym nie podano w nim praktycznego zastosowania tej wielkości. Wielkość zdefiniowaną w powyższy sposób nazwijmy smukłością dendrometryczną strzały:

$$S_h = h/10^{-2} d_{1,3} \quad (1)$$

gdzie h [m], $d_{1,3}$ (w k.) [cm].

Analogicznie można obliczyć smukłość dendrometryczną grubizny strzały bez kory o pierśnicy $d_{1,3}$ (b.k.) i wysokości l lub $(l - 1)$ – dla drzew o $d_{1,3} > 14$ cm w korze (nie biorąc pod uwagę pierwszego metra odziomka):

$$S_l = l/10^{-2} d_{1,3} \quad (2)$$

W wytrzymałości materiałów jako miary podatności pręta na wyboczenie używa się również smukłości, którą nazwiemy – dla rozróżnienia od poprzedniej – smukłością wyboczeniową, zdefiniowaną dla pręta pryzmatycznego jako iloraz długości wyboczeniowej do minimalnego promienia bezwładności przekroju.

Wyznamy smukłość wyboczeniową grubizny strzały bez kory, przy tym dla $d_{1,3} \geq 14$ cm w korze – bez uwzględniania jednometrowego odcinka odziomka, który z uwagi na dużą zbieżystość i napływy korzeniowe traktować można dla reszty strzały jako utwierdzenie. Pozostałą część grubizny strzały proponuje się modelować stożkiem ściętym o dolnej podstawie $d_2 \cong d_{1,3}$ (b.k.), górnej $d_1 = 6$ cm i wysokości $(l - 1)$ [m].

Zakładamy więc kołowość przekrojów poprzecznych strzały; a więc pomijamy wydłużenia tych przekrojów. Wydaje się to być do przyjęcia – zwłaszcza, że wydłużenia przekrojów w środkowej części strzały (gdzie najczęściej zlokalizowane są złamania) są najmniejsze i wynoszą $w \cong 1,073$ [Bruchwald 1995].

Przy powyższych założeniach wyboczenie grubizny strzały sosny sprowadza się do zagadnienia stateczności prostego pręta utwierdzonego w dolnym końcu i swobodnego w górnym, o przekrojach poprzecznych zmieniających się liniowo w sposób ciągły, obciążonego od czoła siłą ściskającą. Wtedy osiowy moment bezwładności przekroju poprzecznego $n-n$ jest funkcją potęgową odległości od stałego punktu O (rys. 1), równą:

$$J_x = J_1 (x/a)^{n-4} \quad \text{przytym} \quad J_1 / J_2 = (d_1 / d_2)^4 \quad (3)$$

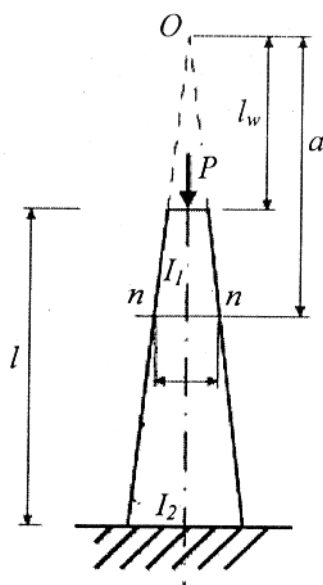
Dla tego przypadku rozpatrywanego przez Timoszenkę [1963] siłę krytyczną (ze względu na wyboczenie) obliczamy ze wzoru:

$$P_{kr} = \eta E_{II} J_2 / (1-1)^2 \quad (4)$$

gdzie:

E_{II} – moduł sprężystości podłużnej,
 J_2 – osiowy moment bezwładności dolnej podstawy strzały
 η – współczynnik obciążenia krytycznego, zależny od ilorazu J_1/J_2 zgod-
nie z równaniem:

$$\eta = 0,805333 + 4,66055 J_1 / J_2 - 7,18764 (J_1 / J_2)^2 + 6,44793 (J_1 / J_2)^3 - 2,26107 (J_1 / J_2)^4 \quad (5)$$



Rys. 1. Model grubizny strzały do analizy wyboczenia
Fig. 1. Model of bolt large timber for buckling analysis

Na podstawie zależności $\eta = (\pi / \mu)^2$ możemy obliczyć współczynnik obliczeniowej długości wyboczeniowej μ :

$$\mu = 3,29853 - 5,37378 J_1 / J_2 + 10,6478 (J_1 / J)^2 - 10,3269 (J_1 / J)^3 + 3,757 (J_1 / J)^4 \quad (6)$$

i smukłość wyboczeniową grubizny strzały:

$$\lambda = \frac{l_w}{i_2} = \frac{4(l-1)\mu}{10^{-2}d_2} \quad (7)$$

gdzie:

$i_2 = d_2/4$ – osiowy promień bezwładności dolnej podstawy strzały.

Stąd wynika wzór na naprężenia krytyczne:

$$\sigma_{kr} = P_{kr} / F_2 = \pi^2 E_{II} / \lambda^2 \quad (8)$$

Nadmienić należy, że istnieje możliwość otrzymania rozwiązania tego zagadnienia dla stożka o dowolnym stałym wykładniku n z wyrażenia $(x/a)^n$ [Timoshenko 1963], natomiast nie jest dotychczas rozwiązany przypadek przy zmiennym n , jak to ma miejsce przy zależności przekrojów strzały wynikającej z jej krzywej morfologicznej. W nieco odmienny sposób należy podejść do zagadnienia wyboczenia świerka i jodły.

Pomiędzy smukłością wyboczeniową λ , a smukłością dendrometryczną S_l (bez uwzględnienia odziomka) istnieje relacja:

$$\lambda / S_l = 4\mu \quad (9)$$

W praktyce dla grubizny strzał $\mu \in (2,2; 3,3)$; a więc $\lambda / S_l \in (8,8; 13,2)$. Można więc twierdzić, że smukłość dendrometryczna S_l (a tym bardziej S_h) sama w sobie nie zawiera treści wytrzymałościowych, przydatnych do analizy wyboczenia. Dotyczy to również jej przydatności do analizy zginania strzały, o którym decyduje sztywność zginania EJ_z strzały.

Stale sprężyste i wytrzymałościowe determinujące wyboczenie

We wzorach (4, 8) występuje moduł sprężystości podłużnej na ściskanie wzdłuż włókien E_{II} . W poradnikach i normach przyjmuje się na ogół tylko jedną wartość tego modułu i to często dla grupy drewna „iglaste” – bez uwzględniania rodzaju tego modułu, jego zależności od reżimu obciążania i wilgotności drewna. Wynika to z przyczyny, że do konstrukcji bierze się drewno suche, a obliczenia dotyczą doraźnej wytrzymałości. Przyjęcie dużego współczynnika bezpieczeństwa pozwala na większą nieścisłość obliczeń. Tymczasem obliczenia stateczności strzał drzew pod działaniem śniegu dotyczą krytycznych sił i naprężeń a współczynniki poprawcze nie mogą być zastosowane.

Tak więc należałoby rozróżnić doraźny moduł sprężystości (charakteryzujący związek pomiędzy naprężeniami i odkształceniami sprężystymi, będącymi natychmiastową reakcją na doraźne, chwilowe obciążenie) od trwałego modułu sprężystości, dotyczącego związku pomiędzy naprężeniami i odkształceniami lekko-sprężystymi rozwijającymi się w czasie.

Doraźny moduł sprężystości nie zależy ani od wilgotności drewna ani od reżimu badań wytrzymałościowych i stanowi górną granicę modułów sprężystości. Dla drewna sosnowego przy rozciąganiu i ściskaniu wynosi on $E_{oII} = 2,45 \cdot 10^4$ MPa [Bielankin 1957].

Ze wzrostem wilgotności drewna i czasu obciążenia stałego, moduł sprężystości zmniejsza się od wartości E_{oII} dla wilgotności $W \cong 0\%$ do minimalnej wartości równej trwałemu modułowi sprężystości przy maksymalnej wilgotności. Proces rozwoju odkształceń lepko-sprężystych przebiega tym wolniej im bardziej suche jest drewno. Przy wilgotności 10 % przy ściskaniu wzdłuż włókien zachodzi to przez okres trzech miesięcy, a przy wilgotności 40 % w czasie działania obciążenia stałego tylko przez trzy godziny [Bielankin 1957]. Trwały moduł sprężystości przy ściskaniu (lub rozciąganiu) wzdłuż włókien dla świeżo ściętego drewna sosnowego wynosi $E_{II} = 0,66 \cdot 10^4$ MPa, a więc jest 3,5 razy mniejszy od doraźnego.

Doraźny moduł sprężystości drewna odpowiada wytrzymałości doraźnej, natomiast trwały moduł sprężystości dotyczy wytrzymałości trwałej – określanej jako naprężenie przy którym (przy stałym obciążeniu) proces odkształceń ustając w okresie nieograniczenie długiego czasu doprowadza drewno do złomu kruchego. Według Bielankina [1957] doraźna wytrzymałość na ściskanie wzdłuż włókien drewna sosnowego o wilgotności $W = 40\%$ jest równa wielkości granicznej $R_{ocII} = 74,6$ MPa i jest taka sama jak drewna suchego. Natomiast trwała wytrzymałość (ustalona już po trzech godzinach stałego obciążenia) wynosi $R_{cII} = 13,7$ MPa. Podobnie rzecz się ma przy zginaniu: $R_{og} = 117,7$ MPa, $R_g = 25,5$ MPa.

Jak wiemy, granica proporcjonalności R_{pr} jest wielkością umowną, również zależną od reżimu obciążenia i wilgotności drewna. Ze wzrostem wilgotności i zmniejszaniem się prędkości obciążenia R_{pr} maleje do wielkości prawie równych zero. Wpływa to na wartość smukłości granicznej λ_{gr} rozdzielającej zakres wybożenia sprężystego ($\lambda \geq \lambda_{gr}$) od niesprężystego ($\lambda < \lambda_{gr}$). Zwykle przyjmuje się, że dla suchego drewna iglastego $\lambda_{gr} = \pi / \sqrt{E / R_{pr}}$ wynosi $\cong 100$. Z uwagi na wskazane wyżej zmienności E i R_{pr} również smukłość graniczna λ_{gr} jest zmienna; zmniejszająca się ze wzrostem wilgotności drewna, co oznacza zwiększanie się zakresu wybożenia sprężystego.

Wpływ mimośrodowość siły ściskającej

W odróżnieniu od ściskania osiowego, w przypadku ściskania mimośrodowego (rys. 2) w pręcie zachodzi nieliniowa zależność pomiędzy naprężeniami i siłą ściskającą [Smirnow 1969]. Przy mimośrodku e przyłożenia siły P , w przekroju x pręta ugiętego o z działa moment gnący równy:

$$M_y(x) = P(e + z_B - z), \quad (10)$$

różniczkowe równanie ugięć ma postać:

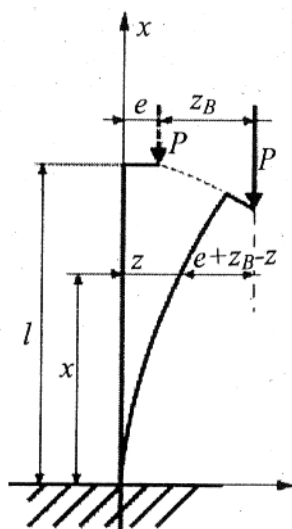
$$d^2z / dx^2 + k^2z = k^2(e + z_B) \quad (11)$$

gdzie: $k^2 = P/EJ_y$, a jego rozwiązanie będące równaniem linii ugięcia pręta:

$$z = e(1 - \cos kx) / \cos kl \quad (12)$$

Największy moment gnący (w utwierdzeniu) jest w tym przypadku równy:

$$M_{y\max} = P(e + z_B) = Pe / \cos kl \quad (13)$$



Rys. 2. Schemat obliczeniowy pręta ściskanego mimośrodowo

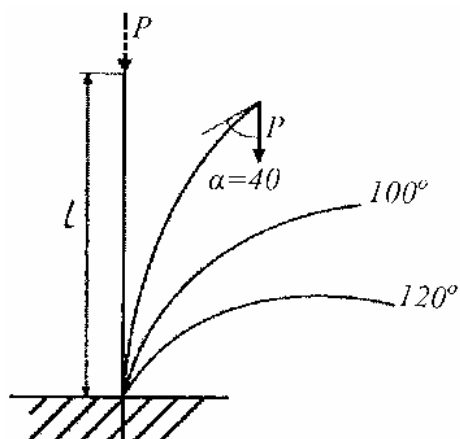
Fig. 2. Calculation diagram of rod compressed eccentrically

Z równania (12) wynika, że ugięcie z zależy liniowo od mimośrodowo e , a nieliniowo od siły P ukrytej w argumentcie k funkcji cosinus. Ugięcie i moment gnący rosną szybciej niż siła P . Również maksymalne naprężenia, w pręcie ściskanym mimośrodowo, nieliniowo zależą od siły P :

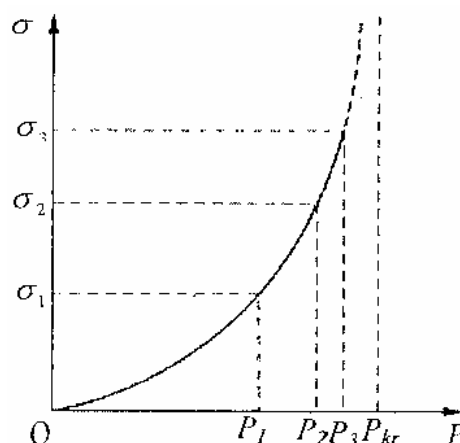
$$\sigma_{\max} = -\left(\frac{P}{F} + \frac{M_{y\max}}{W}\right) = -\frac{P}{F}\left(1 + \frac{e}{W \cos kl / F}\right) \quad (14)$$

Naprężenia ściskające rosną tym szybciej, im bardziej siła P zbliża się do siły krytycznej (eulerowskiej) P_{kr} , opisywanej wzorem Eulera (4) – rys. 3. Mamy

bowiem: $\cos kl = \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{P/P_{kr}}$, stąd przy $P \rightarrow P_{kr}$, $\cos kl \rightarrow 0$. Im większy jest początkowy mimośród siły ściskającej, tym szybciej wzrastają ugięcia przy wzroście siły P . Przy tym dla prętów smukłych siłą niszczącą jest siła eulerowska. Taki sam skutek wywiera początkowa krzywizna pręta.



Rys. 3. Zależność naprężeń w pręcie ściskanym mimośrodowo od siły P
 Fig. 3. Dependency of the stress of eccentrically compressed rod from P force



Rys. 4. Ugięcie pręta obciążonego siłą P większą od krytycznej
 Fig. 4. Flexure of rod loaded with force P , higher than the critical one

Jeżeli siła P przyjmuje nieco większą wartość niż siła krytyczna P_{kr} , to wywołuje ona znaczne ugięcia pręta, mierzone np. kątem ugięcia α swobodnego końca pręta (rys. 4). Zależność obciążenie – ugięcie dla pryzmatycznego pręta wyboczonego, otrzymana w oparciu o ściśle różniczkowe równanie linii ugięcia [Timoshenko 1972] podano w tabeli 1. Z tabeli wynika, że jeżeli $P = 1,884 P_{kr}$ to pręt wygina się prawie do poziomu utwierdzenia ($\alpha_{max} = 120^\circ$).

Tabela 1. Zależność obciążenie – ugięcie dla pręta wyboczonego
 Table 1. Dependency: load – flexure of buckled rod

| α [°] | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 140 |
|--------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| P/P_{kr} | 1 | 1,015 | 1,063 | 1,152 | 1,293 | 1,518 | 1,884 | 2,541 |

Podsumowanie

Wnioski z przedstawionego wyżej rozważania (pod kątem ich przydatności do analizy wyboczenia strzał sosnowych pod wpływem śniegu) oparto o podane w tabeli 2 wyniki obliczeń parametrów wyboczeniowych strzał sosnowych z trzech stopni grubości 115, 20 i 25 cm, przy pełnym zakresie możliwych wysokości drzew, zgodnie z tablicami Radwańskiego [1956].

Tabela 2. Zakresy zmienności wyboczeniowych parametrów strzał sosny z trzech stopni grubości

Table 2. Extent of variations of buckling parameters of pine bolts in three thickness degrees

| Pierśnica $d_{1,3}$ (w.k.) [cm] | Przedziały wartości | | | | | | | | |
|--|-------------------------------|-------------------------------|--------|---|--------------------------------|------------------------|--|--------------------------------|-----------------------------------|
| | Wysokości drzew h [m] | Smukłości dendrometrycznej | | Wysokości grubizny strzał l [m] | Współczynnika wybocz. μ | Smukłości λ | Naprężen krytycz. σ_{kr} [MPa] | Siły krytycz. P_{kr} [kN] | Ilorazu R_{ocil}/σ_{kr} |
| | | S_n | S_L | | | | | | |
| 15 | 14-21 | 100-150 | 71-114 | 11-18 | 3,158 | 902,3- -1533,9 | 0,796- -0,275 | 12,25- -4,23 | 16,3- -47,3 |
| 20 | 14-25 | 82-132 | 59-106 | 11-21 | 3,216- -3,245 | 756,7- -1361,3 | 1,13- -035 | 25,66- -9,92 | 11,5- -37,1 |
| 25 | 14-26 | 67-113 | 52-98 | 12-23,5 | 3,275 | 686,2- -1281,5 | 1,376- -0,394 | 47,64- -16,36 | 9,4- -33,0 |

1. Dendrometryczna smukłość grubizny strzały S_l (a tym bardziej smukłość całego drzewa S_n) nie nadaje się do analizy wyboczenia strzał. Iloraz $\lambda / S_l = 4\mu \in (8,8; 13,2)$ zależy od współczynnika wyboczeniowego μ , zawartego dla strzał w przedziale (2,2; 3,3).
2. Smukłość grubizny strzały jest bardzo duża i świadczy, że w początkowych stadiach jej wyboczenie jest sprężyste (smukłość graniczną oszacować można na $\lambda_{gr} \cong 80$).
3. Przy obliczeniach strzał na wyboczenie należy brać pod uwagę właściwe stałe materiałowe, uwzględniając wilgotność drewna strzał i ich trwałą wytrzymałość osiąganą już po kilkugodzinnym obciążeniu korony śniegiem.
4. Naprężenia krytyczne σ_{kr} ze względu na wyboczenie strzał sosny są bardzo małe; dla badanych stopni grubości 9,4 ÷ 47,3 razy mniejsze od wytrzymałości

doraźnej na ściskanie wzdłuż włókien. W danym stopniu grubości ze wzrostem wysokości drzew naprężenia σ_{kr} mogą się zmniejszyć trzykrotnie.

5. Istotnym czynnikiem wpływającym na wyboczenie strzał przy okiści jest mimośrodowość obciążenia strzały śniegiem, wynikająca z mimośrodowości korony, a także z początkowej krzywizny strzały. Czynniki te nie zmieniają wartości siły krytycznej, ale zwiększają możliwość zaistnienia wyboczenia strzały będącej w stanie utraty stateczności (poprzedzającym wygięcie strzały).

Bibliografia

Beljankin F.P., Jacenko W.F. 1957. Deformativnost' i soprotivlaemost' drevesiny kak uprugo-wiazko-plastičeskogo tela, Izd. Akad. Nauk USSR, Kiev.

Bruchwald A. 1995. Dendrometria, Wyd. SGGW, Warszawa.

Radwański B. 1956. Tablice miąższości i zbieżystości dłużyc, kłód i wyrzynków strzały dla sosny. Roczn. Nauk Leśn. 10.

Słownik encyklopedyczny [1996] leśnictwa, drzewnictwa, ochrony środowiska, łowiectwa, Wyd. SGGW, Warszawa.

Smirnov A.F. i in. 1969. Soprotivlenie materialov, Izd. „Vysšaja škola”, Moskwa.

Timoshenko S.P., Gere J.M. 1963. Teoria stateczności sprężystej, Wyd. „Arkady”, Warszawa.

Timoshenko S.P., Gere J.M. 1972. Mechanics of materials, Van Nostrand Reinhold Comp., New York.

EFFECT OF SOME FACTORS ON THE PINE TREES BUCKLING

Summary

The publication is devoted to analyse the effect of slenderness, elasticity module, limit of proportionality, compression strength and eccentricity of load, on the pine bolt buckling. It has been proposed to calculate the slenderness of bolt large timer,

without the first metre of butt end, such as for the cut cone, loaded with axial compressing force on the front. It has been found, that the loss of bolt stability, when the crown is loaded with snow, is determined by permanent module of elasticity while compressing along the fibres. Eccentricity of the bolt load considerably contributes to the loss of bolt stability, however it does not reduce the critical force value.

Key words: pine bolt buckling, snowbreaks, pine bolt slenderness