

MATEMATYCZNY MODEL KINETYKI REHYDRACJI SUSZU WARZYWNEGO

Bogusława Łapczyńska-Kordon

Katedra Inżynierii Mechanicznej i Agrofizyki, Uniwersytet Rolniczy w Krakowie

Stanisława Roczowska-Chmaj

Instytut Inżynierii Rolniczej i Informatyki, Uniwersytet Rolniczy w Krakowie

Streszczenie. W pracy zostały sformułowane modele transportu ciepła i masy dla procesu uwadniania suszu cebulowego podczas „gotowania”. Założono, że transport ciepła i masy odbywa się tylko za pomocą dyfuzji, dlatego modele transportu wody i suchej substancji sformułowano na podstawie drugiego prawa Ficka, a transportu ciepła – prawa Fouriera. Do rozwiązania równań modelowych przyjęto warunki początkowe jako funkcje stałe, a warunki brzegowe opisano warunkami Dirichletta, zakładając, że na początku procesu na brzegu próbki ustala się stan równowagi związany ze stężeniem składników i temperaturą, a ciało ma kształt płyty nieskończonej. W celu zweryfikowania modeli wykonano badania uwadniania suszu cebulowego w kształcie krążków we wrzącej wodzie, oznaczając zawartość wody i suchej substancji co 5 min. Proces trwał 30 min. Na podstawie weryfikacji logicznej i empirycznej stwierdzono, że sformułowane modele poprawnie opisują zmiany zawartości wody i suchej substancji w materiale oraz zmiany jego temperatury. Błąd względny pomiędzy wartościami pomierzonymi a obliczonymi za pomocą modelu wahał się pomiędzy 1 a 9% dla suchej substancji i zawartości wody.

Słowa kluczowe: rehydratacja, model matematyczny, sucha substancja, zawartość wody, temperatura, cebula

Wstęp

Susz warzywny, jako produkt procesu suszenia, poddawany jest ponownemu uwodnieniu. Proces uwodnienia nie jest odwracalnym, ponieważ podczas suszenia zmienia się struktura materiału, jego skład chemiczny i właściwości fizyczne. Ponadto w czasie rehydratacji następuje nie tylko transport wody do wnętrza materiału, ale również transport substancji rozpuszczalnych w wodzie do otoczenia oraz transport energii, w formie ciepła, do wnętrza materiału, którego nośnikiem jest woda podgrzana. Poznanie zjawisk zachodzących podczas tego procesu umożliwia matematyczne modele transportu masy i ciepła. Za pomocą symulacji z wykorzystaniem tych modeli można dobrać odpowiedni czas uwadniania, w zależności od rodzaju i właściwości suszu wyprodukowanego różnymi metodami suszenia.

Proces rehydratacji był przedmiotem modelowania wielu badaczy. Saguya, Marabia i Wallach [2005] dokonali przeglądu modeli wykorzystanych do opisu procesu rehydrata-

cji przez różnych badaczy. Stwierdzili, że proces ten był opisywany, modelami empirycznymi i semiempirycznymi (Page'a, kinetyki pierwszego rzędu, Bekers'a, funkcją rozkładu Weibulla [Corzo i in.2008]), modelami teoretycznymi dyfuzyjnymi opartymi na drugim prawie Ficka i przepływu kapilarnego [Bakalis i in. 2009].

Wielu badaczy formułowało modele transportu masy podczas rehydratacji, głównie na podstawie drugiego prawa Ficka [Sanjuan 1999, 2001a, 2001b, Bilbao-Sainz 2005, Łapczyńska-Kordon 2007]. Modele te opisywały przede wszystkim dyfuzję wody do materiału, nie uwzględniały procesu transportu stałej substancji do otaczającej wody, który w przypadku „gotowania” suszu jest dość znaczny.

Dlatego, w pracy podjęto próbę sformułowania modelu transportu masy, uwzględniającego transport wody i stałej substancji, oraz ciepła, podczas rehydratacji suszu z cebuli w gorącej wodzie.

Matematyczny model

Rehydratacja suszu jest procesem złożonego transportu ciepła i masy: dyfuzji ciepła i masy wody do wnętrza materiału oraz transportu suchej substancji do otaczającej wody. Przed sformułowaniem modeli matematycznych transportu ciepła, masy i suchej substancji przyjęto założenia, umożliwiające opis procesu za pomocą praw wymiany ciepła i masy w ciałach stałych o regularnych kształtach.

Założenia do modelu

1. Materiał jest izotropowy i ma kształt płyty nieskończonej. Założenie o izotropowości cebuli jest uproszczeniem, ze względu na to, że model będzie opisywał zmiany analizowanych wielkości względem jednej zmiennej przestrzennej, odpowiadającej grubości próbki. Pominięto zmiany po promieniu, ze względu na budowę anatomiczną cebuli.
2. Podczas procesu występuje jednocześnie transport wody do wnętrza materiału i suchej substancji do otoczenia oraz transport ciepła.
3. Transport wody i suchej substancji odbywają się za pomocą dyfuzji, którą opisano drugim prawem Ficka, uwzględniając jedną zmienną kartezjańską:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = D_{ew} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial s.s.}{\partial \tau} = D_{es.s.} \frac{\partial^2 s.s.}{\partial x^2} \quad (2)$$

gdzie:

- u – zawartość wody [kg/kg],
- s.s. – masa suchej substancji [kg],
- D_{ew} – efektywny współczynnik dyfuzji wody [$m^2 \cdot s^{-1}$],
- $D_{es.s.}$ – efektywny współczynnik dyfuzji suchej substancji [$m^2 \cdot s^{-1}$],
- τ – czas [min.],
- x – współrzędna kartezjańska [m].

4. Transport energii w postaci ciepła wyrażono równaniem Fouriera:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3)$$

gdzie:

- T – temperatura [K],
a – współczynnik dyfuzji ciepła,

$$a = \frac{\lambda}{c\rho} \quad (4)$$

- λ – współczynnik przewodności cieplnej [W/mK],
c – ciepło właściwe [kJ/kgK],
 ρ – gęstość [kg/m³].

5. Zakładając, że kształt ciała jest płytą nieskończoną, równania (1), (2) i (3) rozwiązano analitycznie, przyjmując odpowiednie warunki początkowe oraz brzegowe Dirichleta:

- $u = u_0$ dla $\tau = 0$ i $0 \leq x \leq R$,
- $u = u_r$ dla $\tau > 0$ i $x = 0$ oraz $x = R$
- $s.s. = s.s._0$ dla $\tau = 0$ i $0 \leq x \leq R$,
- $s.s. = s.s._r$ dla $\tau > 0$ i $x = 0$ oraz $x = R$
- $T = T_0$ dla $\tau = 0$ i $0 \leq x \leq R$,
- $T = T_r$ dla $\tau > 0$ i $x = 0$ oraz $x = R$

Rozwiązania analityczne mają następującą postać:

- dla zawartości wody

$$\frac{u_r - u(\tau)}{u_r - u_{0r}} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp \left[- \frac{\pi^2 (2n+1)^2}{4} \frac{D_{cw} \tau}{R^2} \right] \quad (5)$$

- dla suchej substancji

$$\frac{s.s._r - s.s.(\tau)}{s.s._r - s.s._0} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp \left[- \frac{\pi^2 (2n+1)^2}{4} \frac{D_{cs} \tau}{R^2} \right] \quad (6)$$

- dla temperatury

$$\frac{T_r - T(\tau)}{T_r - T_0} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp \left[- \frac{\pi^2 (2n+1)^2}{4} \frac{a \tau}{R^2} \right] \quad (7)$$

gdzie:

- $u(\tau)$ – chwilowa zawartość wody [kg/kg],
 u_0 – początkowa zawartość wody [kg/kg],
 u_r – równowagowa zawartość wody [kg/kg],
 $s.s.(\tau)$ – chwilowa masa suchej substancji [kg],
 $s.s._0$ – początkowa zawartość suchej substancji [kg],
 $s.s._r$ – równowagowa masa suchej substancji [kg],
R – wymiar charakterystyczny [m],
 T_0 – temperatura początkowa [K],

T_r – temperatura równowagowa [K],

n – parametr [-].

Do obliczeń symulacyjnych w równaniach (5), (6) i (7) uwzględniono tylko pierwszy wyraz szeregu ($n=1$), ponieważ tak opisany model z wystarczającą dokładnością opisuje przebieg zmian zawartości wody podczas uwadniania

6. Założono, że efektywne współczynniki dyfuzji wody i suchej substancji zmieniają się w czasie procesu. Współczynniki te zostały wyznaczone metodą zagadnień odwrotnych, na podstawie wykonanych pomiarów zmian zawartości wody i suchej substancji w próbkach cebuli.

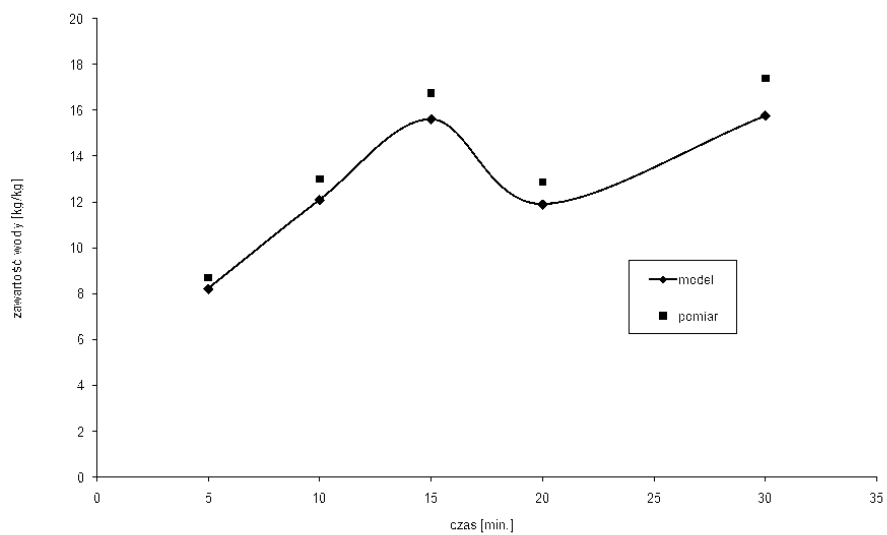
Weryfikacja modelu

Metodyka badań

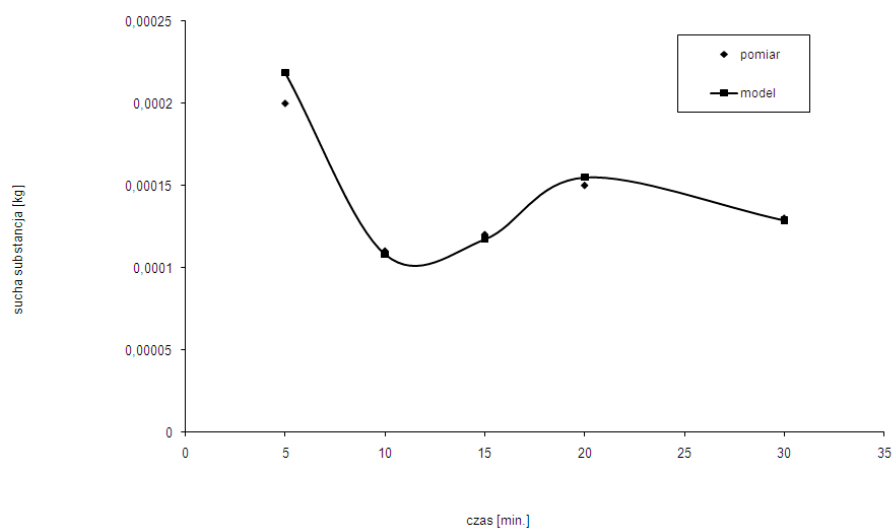
Badaniom poddano cebulę odmiany „Rawska”. Cebulę krojono w plasterki o grubości 2 mm. Następnie próbki suszono w suszarce konwekcyjnej z wymuszonym obiegiem powietrza w temperaturach 50°C. Po suszeniu cebulę poddawano rehydracji w temperaturze 24°C przez 5, 10, 20, 30 minut, umieszczając próbki w określonej objętości wrzącej wody destylowanej (temperatura 100°C). Równocześnie na każdym poziomie czasowym oznaczano zawartość suchej substancji w badanych próbkach, zgodnie z wymogami normy PN -90/A-75101.

Analiza wyników

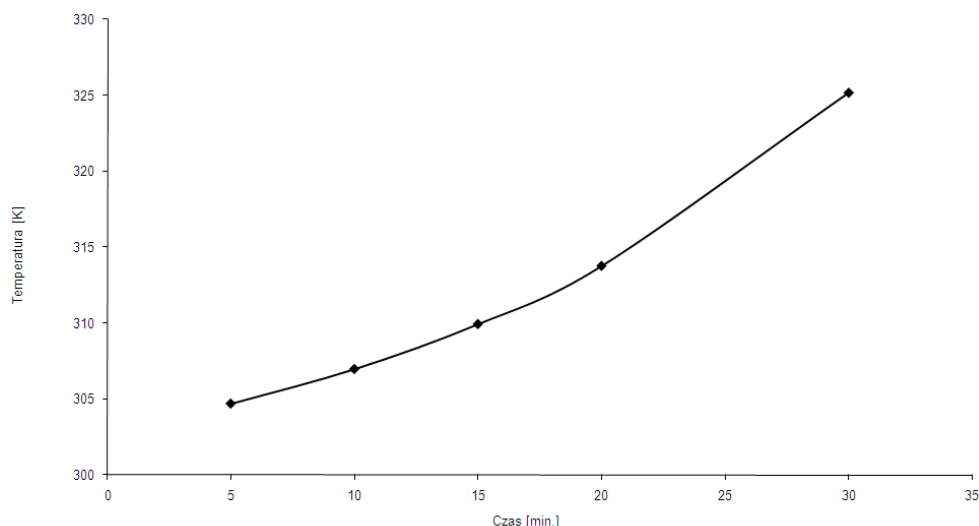
W oparciu o sformułowane modele wykonano obliczenia zmian zawartości wody, ubytków suchej substancji oraz temperatury podczas uwadniania suszu we wrzącej wodzie (rys. 1, 2, 3). Wartości otrzymane z obliczeń, na podstawie modeli, porównano z wynikami pomiarów. Weryfikacja empiryczna dotyczyła tylko zmian zawartości wody i suchej substancji, ponieważ pomiar temperatury próbki w czasie uwadniania nie był wykonywany. Model zmian temperatury został zweryfikowany tylko logicznie. Weryfikacja logiczna potwierdziła poprawność założeń, że transport ciepła i masy odbywa się za pomocą dyfuzji i prawa opisujące te procesy podczas rehydratacji suszu dobrze je odzwierciedlają. Choć należało by się spodziewać, że zgodnie z modelem zawartość wody powinna wzrastać, a zawartość suchej substancji maleć do wartości równowagowej. Analizując jednak przebieg zmian zawartości wody i suchej substancji podczas procesu, uzyskanych z obliczeń za pomocą modelu, zaobserwowano, że po 20 min. zawartość wody nagle maleje, a następnie wzrasta, a suchej substancji wzrasta, dale maleje i są te przebiegi bardzo podobne do otrzymanych z pomiarów. Takie zmiany są najprawdopodobniej spowodowane tym, że współczynniki dyfuzji wody i suchej substancji były wyznaczane metodą zagadnień odwrotnych, na podstawie wykonanych wcześniej pomiarów zawartości wody i suchej substancji. Zatem także weryfikacja empiryczna potwierdziła fakt, że modele transportu masy z dobrą dokładnością przybliżają przebieg zmian zawartości wody i suchej substancji podczas nawadniania w gorącej wodzie. Błąd względny pomiędzy wartościami doświadczalnymi a teoretycznymi wahał się; dla zawartości wody od 5 do 9%, a dla suchej substancji od 1 do 9%. Sformułowane modele umożliwiają symulację procesu uwadniania suszu i dobór np. optymalnego czasu gotowania.



Rys. 1. Zmiany zawartości wody w zależności od czasu
Fig. 1. Changes in water content depending on time



Rys. 2. Zmiany zawartości suchej substancji w zależności od czasu
Fig. 2. Changes in dry matter content depending on time



Rys. 3. Zmiany temperatury materiału w zależności od czasu

Fig. 3. Changes in material temperature depending on time

Podsumowanie

Na podstawie analizy wyników stwierdzono, że

- przyjęte modele transportu wody i suchej substancji poprawnie opisują proces gotowania suszu warzywnego, co potwierdziła empiryczna ich weryfikacja, wykazująca dobrą zgodność wartości obliczonych z pomierzonymi (dla wody $R^2=0,98$ dla suchej substancji $R^2=0,95$),
- błędy względne zmieniają się od 5 do 9% dla zawartości wody i od 1 do 9% dla zawartości suchej substancji,
- logiczna weryfikacja zaproponowanych modeli opartych na prawach opisujących dyfuzję ciepła i masy podczas rehydratacji potwierdziła poprawność przyjętych założeń, ponieważ otrzymany z obliczeń przebieg zmian zawartości wody i suchej substancji i temperatury jest zgodny z przewidywaniami – zawartość wody w materiale i jego temperatura rośnie, a zawartość suchej substancji maleje do równowagowej wartości.

Bibliografia

- Bakalis, S., Kyritsi, A., Karathanos, V.T., Yanniotis, S. 2009. Modeling of rice hydration using finite elements. *Journal of Food Engineering*, 94 (3). s. 321-325.
- Bilbao-Sainz, C., Andres, A., & Fito, P. 2005. Hydration kinetics of dried apple as affected by drying conditions. *Journal of Food Engineering*. 68. s. 369-376.

- Corzo, O., Bracho, N., Pereira, A., Vasquez, A.** 2008. Weibull distribution for modeling air drying of coroba slices. *LWT - Food Science and Technology*. 41 (10). s. 2023-2028.
- Łapczyńska-Kordon B.** 2007. Model suszenia mikrofalowo-podciśnieniowego owoców i warzyw. *Inżynieria Rolnicza*. Nr 10(98).
- Saguy, I. S., Marabi, A., Wallach, R.** 2005. T New approach to model rehydration of dry food particulates utilizing principles of liquid transport in porous mediar. *Trends in Food Science & Technology* 16. s. 495-506.
- Sanjuan, N., Carcel, J. A., Clemente, G., Mulet, A.** 2001b. Modeling of the rehydration process of broccoli florets. *European Food Research and Technology*. 212. s. 449-453.
- Sanjuan, N., Clemente, G., Bon, J., Mulet, A.** 2001a. The effect of blanching on the quality of dehydrated broccoli florets. *European Food Research and Technology*. 213. s. 474-479.
- Sanjuan, N., Simal, S., Bon, J., Mulet, A.** 1999. Modeling of broccoli stems rehydration process. *Journal of Food Engineering*. 42. s. 27-31.

MATHEMATICAL MODEL OF REHYDRATION KINETICS FOR DRIED VEGETABLES

Abstract. The paper presents formulated models for heat and mass transport for the process involving dried onion hydration during “boiling”. It has been assumed that heat and mass transport is carried out through diffusion only, therefore water and dry matter transport models have been formulated on the basis of Fick’s second law, and heat transport models – of Fourier’s Law. In order to solve model equations, the researchers took initial conditions as constant functions, and described boundary conditions using Dirichlett conditions. It has been assumed that at the beginning of the process, an equilibrium state is being established at the sample boundary, which is connected with concentration of components and temperature, and the body has an infinite plate shape. Tests involving dried onion hydration were performed to verify the models. Disk-shaped dried onions were put in hot water, and their water and dry matter content was determined every 5 min. The process took 30 min. Logical and empirical verification allows to state that the formulated models correctly describe changes in water and dry matter content in the material and change in its temperature. Relative error between measured values and values computed using the model ranged from 1 to 9% for dry matter and water content.

Key words: rehydration, mathematical model, dry matter, water content, temperature, onion

Adres do korespondencji:

Bogusława Łapczyńska-Kordon; e-mail: kordon@ur.krakow.pl
Katedra Inżynierii Mechanicznej i Agrofizyki
Uniwersytet Rolniczy w Krakowie
ul. Balicka 120
30-149 Kraków