

## IDENTYFIKACJA SPEKTRUM RELAKSACJI METODĄ MOMENTÓW: WŁASNOŚCI I ZASTOSOWANIA

Anna Stankiewicz

*Katedra Podstaw Techniki, Uniwersytet Przyrodniczy w Lublinie*

**Streszczenie.** W pracy [Stankiewicz 2009] przedstawiono metodę wyznaczania spektrum relaksacji na podstawie dyskretnych, zakłóconych pomiarów modułu relaksacji zgromadzonych w standardowym teście relaksacji naprężeń, w której model spektrum dobierany jest tak, aby zapewnić najlepsze jego wygładzenie przy równoczesnym odtworzeniu pomiarów modułu relaksacji. W tej pracy zbadano własności teoretyczne metody, w szczególności przeanalizowano wpływ zakłóceń na wyznaczony model spektrum i pokazano, że jego wygładzenie zależy zarówno od planu eksperymentu jak i od wyznaczonych pomiarów modułu relaksacji. Zaproponowano modyfikację algorytmu dla przypadku, gdy wartość ustalona modułu relaksacji jest niezerowa oraz wyprowadzono prostą formułę rekurencyjną. Podano także przykład jej zastosowania do wyznaczenia spektrum relaksacji próbki buraka cukrowego.

**Słowa kluczowe:** lepkość, spektrum relaksacji, identyfikacja, optymalne wygładzenie modelu, burak cukrowy

### Wstęp

Wielu autorów [Christensen 1971; Brabec i in. 1997; Anderssen i Loy 2002] zwraca uwagę na to, iż pełną informację o własnościach mechanicznych materiałów lepkoelastycznych niesie ich spektrum relaksacji. Znając spektrum relaksacji można wyznaczyć inne, powszechnie stosowane w obliczeniach inżynierskich, charakterystyki materiałowe. Spektrum relaksacji nie jest wprost dostępne pomiarowo, musi więc być wyznaczane w oparciu o charakterystyki pomiarowo dostępne. Jest to jeden z klasycznych problemów reologii.

W pracy rozważa się zadanie identyfikacji spektrum relaksacji materiałów liniowo lepkoelastycznych na podstawie dyskretnych, zakłóconych pomiarów modułu relaksacji zgromadzonych w standardowym teście relaksacji naprężeń. W pracy [Stankiewicz 2009] zaproponowano metodę wyznaczania spektrum relaksacji na podstawie dyskretnych, zakłóconych pomiarów modułu relaksacji zgromadzonych w standardowym teście relaksacji naprężeń, w której model spektrum dobierany jest tak, aby zapewnić najlepsze jego wygładzenie przy równoczesnym odtworzeniu pomiarów modułu relaksacji. Analiza własności metody oraz przykład jej zastosowania do identyfikacji spektrum relaksacji rzeczywistego materiału roślinnego jest przedmiotem tej pracy.

### Identyfikacja spektrum relaksacji metodą momentów

W reologii powszechnie przyjmuje się, że moduł relaksacji  $G(t)$  posiada całkowitą reprezentację postaci [Christensen 1971]:

$$G(t) = \int_0^{\infty} H(v) e^{-tv} dv, \quad (1)$$

gdzie nieujemna funkcja  $H(v)$  nazywana jest spektrum częstotliwości relaksacji, a  $v$  oznacza częstotliwość relaksacji. Będziemy zakładać, że rzeczywiste spektrum częstotliwości relaksacji  $H(v)$  jest całkowicie nieznanne, natomiast moduł relaksacji  $G(t)$  jest dostępny pomiarowo. Moduł relaksacji  $G(t)$  będziemy przybliżać modelem:

$$G_M(t) = \int_0^{\infty} H_M(v) e^{-tv} dv, \quad (2)$$

gdzie  $H_M(v)$  jest modelem spektrum relaksacji. Będziemy zakładać, że przeprowadzono test relaksacji naprężeń, którego rezultatem jest zbiór pomiarów modułu relaksacji  $\bar{G}(t_i) = G(t_i) + z(t_i)$  w chwilach czasu  $t_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , gdzie  $z(t_i)$  jest addytywnym błędem pomiarowym. Problem identyfikacji spektrum relaksacji  $H(v)$  metodą momentów polega na doborze modelu  $H_M(v)$  w klasie funkcji całkowalnych z kwadratem  $L^2[0, \infty)$  minimalizującego kryterium identyfikacji

$$\|H_M(\cdot)\|^2 = \int_0^{\infty} H_M(v)^2 dv \rightarrow \min_{H_M(\cdot) \in L^2[0, \infty)} \quad (3)$$

przy ograniczeniach

$$\bar{G}(t_i) = \int_0^{\infty} H_M(v) e^{-t_i v} dv, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Rozwiązanie zadania (3)-(4) istnieje, optymalny model spektrum relaksacji dany jest formułą [Stankiewicz 2009]:

$$H_{M,N}(v) = \bar{G}_N^T \Phi_N^{-1} \varphi_N(v), \quad (5)$$

gdzie wektor pomiarów modułu relaksacji  $\bar{G}_N = [\bar{G}(t_1) \ \dots \ \bar{G}(t_N)]^T$ , funkcja wektorowa  $\varphi_N(v) = [e^{-t_1 v} \ \dots \ e^{-t_N v}]^T$ , a macierz

$$\Phi_N = \left[ \int_0^{\infty} e^{-t_i v} e^{-t_j v} dv \right]_{N \times N} = \left[ \frac{1}{t_i + t_j} \right]_{N \times N}.$$

Jest on jednoznaczny, ciągły zarówno względem częstotliwości relaksacji  $\nu$  jak i danych zadania  $\{t_i, \overline{G}(t_i)\}$  i najlepiej wygładzonym modelem spektrum relaksacji w klasie funkcji całkowalnych z kwadratem spełniającym ograniczenia (4), czyli gwarantującym odtworzenie pomiarów modułu relaksacji.

### Formuła algebraiczna

Jeśli rozkład SVD (ang. *Singular Value Decomposition*) macierzy  $\Phi_N$  przyjmuje postać

$$\Phi_N = V \Sigma V^T, \quad (6)$$

gdzie  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in R^{N,N}$  jest macierzą utworzoną z wartości szczególnych  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  macierzy  $\Phi_N$ , zaś  $V \in R^{N,N}$  jest macierzą ortogonalną, to optymalny model spektrum relaksacji na podstawie (5) i (6) dany jest formułą

$$H_{M,N}(\nu) = \overline{G}_N^T V \Sigma^{-1} V^T \varphi_N(\nu), \quad (7)$$

gdzie  $N \times N$  wymiarowa macierz diagonalna  $\Sigma^{-1} = \text{diag}(1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_N)$ .

### Wygładzenie spektrum relaksacji

Minimalizowany w (3) wskaźnik

$$I_N = \int_0^\infty H_{M,N}(\nu)^2 d\nu$$

jest miarą wygładzenia spektrum relaksacji. Na podstawie (5) wskaźnik ten jest równy

$$I_N = \int_0^\infty \overline{G}_N^T \Phi_N^{-1} \varphi_N(\nu) \varphi_N(\nu)^T \Phi_N^{-1} \overline{G}_N d\nu = \overline{G}_N^T \Phi_N^{-1} \int_0^\infty \varphi_N(\nu) \varphi_N(\nu)^T d\nu \Phi_N^{-1} \overline{G}_N,$$

a stąd, uwzględniając definicję macierzy  $\Phi_N$  i wektora  $\varphi_N(\nu)$ , otrzymujemy formułę

$$I_N = \overline{G}_N^T \Phi_N^{-1} \overline{G}_N,$$

którą, wykorzystując wzór  $\Phi_N^{-1} = V \Sigma^{-1} V^T$ , można przedstawić w równoważnej postaci:

$$I_N = \overline{G}_N^T V \Sigma^{-1} V^T \overline{G}_N.$$

Stąd uwzględniając diagonalną strukturę macierzy  $\Sigma^{-1}$  natychmiast otrzymujemy

$$I_N = \sum_{i=1}^N w_i^2 / \sigma_i, \quad (8)$$

gdzie  $w = [w_1 \ \dots \ w_N]^T = V^T \bar{G}_N$ . Na podstawie (8) zachodzą oszacowania

$$\sum_{i=1}^N w_i^2 / \sigma_1 \leq I_N \leq \sum_{i=1}^N w_i^2 / \sigma_N, \quad (9)$$

gdzie  $\sigma_1$  to największa, a  $\sigma_N$  to najmniejsza wartość szczególna macierzy  $\Phi_N$ . Ponieważ dla ortogonalnej macierzy  $V$  zachodzi równość  $\sum_{i=1}^N w_i^2 = w^T w = \bar{G}_N^T V V^T \bar{G}_N = \bar{G}_N^T \bar{G}_N$ , nierówności (9) przyjmują ostatecznie postać

$$\bar{G}_N^T \bar{G}_N / \sigma_1 \leq I_N \leq \bar{G}_N^T \bar{G}_N / \sigma_N. \quad (10)$$

Równość (8) i oszacowanie (10) wskazują, że wygładzenie spektrum relaksacji zależy zarówno od wyników eksperymentu  $\bar{G}_N$ , jak i od planu eksperymentu, czyli doboru punktów pomiarowych decydujących o wartościach szczególnych macierzy  $\Phi_N$ .

### Wpływ zakłóceń

Niech

$$H_{M,N}^0(v) = G_N^T \Phi_N^{-1} \varphi_N(v) \quad (11)$$

będzie przybliżeniem spektrum relaksacji, jakie uzyskalibyśmy na podstawie idealnych pomiarów modułu relaksacji  $G_N = [G(t_1) \ \dots \ G(t_N)]^T$ . Z (11) i (5) natychmiast wynika, że

$$H_{M,N}(v) - H_{M,N}^0(v) = \bar{G}_N^T \Phi_N^{-1} \varphi_N(v) - G_N^T \Phi_N^{-1} \varphi_N(v) = z_N^T \Phi_N^{-1} \varphi_N(v), \quad (12)$$

gdzie wektor zakłóceń  $z_N^T = [z(t_1) \ \dots \ z(t_N)]$ . Stąd, uwzględniając ponownie definicję macierzy  $\Phi_N$  i wektora  $\varphi_N(v)$ , kwadratowy błąd całkowity można przedstawić jako

$$J_N = \int_0^{\infty} [H_{M,N}(v) - H_{M,N}^0(v)]^2 dv = \int_0^{\infty} z_N^T \Phi_N^{-1} \varphi_N(v) \varphi_N^T(v) \Phi_N^{-1} z_N dv = z_N^T \Phi_N^{-1} z_N, \quad (13)$$

lub wykorzystując ponownie rozkład SVD (6) w postaci

$$J_N = \sum_{i=1}^N z_i^2(t_i) / \sigma_i \quad (14)$$

Wobec równości (12)-(14) oraz ciągłości funkcji  $H_{M,N}(v)$  i  $H_{M,N}^0(v)$  względem częstotliwości relaksacji spektrum  $H_{M,N}(v)$  dąży do modelu  $H_{M,N}^0(v)$ , jaki uzyskalibyśmy dla pomiarów idealnych liniowo ze względu na zakłócenia  $z_N$ , gdy  $z_N \rightarrow 0$ .

### Algorytm rekurencyjny

Ponieważ macierz  $\Phi_{N+1}$  można przedstawić w postaci

$$\Phi_{N+1} = \begin{bmatrix} \Phi_N & \phi_N \\ \phi_N^T & \int_0^\infty e^{-t_{N+1}v} e^{-t_N v} dv \end{bmatrix},$$

gdzie wektor

$$\phi_N = \left[ \int_0^\infty e^{-t_1 v} e^{-t_N v} dv \quad \dots \quad \int_0^\infty e^{-t_N v} e^{-t_N v} dv \right]^T = \left[ \frac{1}{t_1 + t_N} \quad \dots \quad \frac{1}{t_N + t_N} \right]^T,$$

na podstawie znanego wzoru na odwracanie macierzy blokowych [Kaczorek 1998, Twierdzenie 1.28] dla  $N+1$  mamy

$$\Phi_{N+1}^{-1} = \begin{bmatrix} \Phi_N^{-1} + \beta_N^{-1} \Phi_N^{-1} \phi_N \phi_N^T \Phi_N^{-1} & -\beta_N^{-1} \Phi_N^{-1} \phi_N \\ -\beta_N^{-1} \phi_N^T \Phi_N^{-1} & \beta_N^{-1} \end{bmatrix},$$

gdzie  $\beta_N = \int_0^\infty e^{-t_{N+1}v} e^{-t_N v} dv - \phi_N^T \Phi_N^{-1} \phi_N$ . Wobec dodatniej określoności macierzy  $\Phi_{N+1}^{-1}$

parametr  $\beta_N > 0$ . Ponieważ  $\bar{G}_{N+1} = [\bar{G}_N^T \quad \bar{G}(t_{N+1})]^T$  a  $\phi_{N+1}(v) = [\phi_N^T(v) \quad e^{-t_{N+1}v}]^T$ , przybliżenie spektrum relaksacji wyznaczone na podstawie  $N+1$  pomiarów dane jest wzorem

$$H_{M,N+1}(v) = H_{M,N}(v) + \beta_N^{-1} [\bar{G}_N^T \Phi_N^{-1} \phi_N - \bar{G}(t_{N+1})] [\phi_N^T \Phi_N^{-1} \phi_N(v) - e^{-t_{N+1}v}].$$

### Modyfikacja

Dla wielu materiałów o własnościach lepkosprężystych, w tym dla materiałów pochodzenia roślinnego  $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = G_\infty > 0$  (por. [Stankiewicz 2007; Stankiewicz i Gołacki 2008]). Jest tak również dla badanej poniżej próbki buraka cukrowego. Wobec tego w miejsce klasycznego modelu (2) dogodnie jest rozpatrywać model rozszerzony postaci:

$$G_M(t) = \int_0^\infty H_M(v) e^{-tv} dv + G_\infty.$$

Zadanie wyznaczenia modelu spektrum relaksacji  $H_M(\cdot)$  klasy  $L^2[0, \infty)$  o najmniejszej normie przyjmuje wówczas następującą postać:

$$\int_0^{\infty} H_M(v)^2 dv \rightarrow \min_{\substack{H_M(\cdot) \in L^2[0, \infty) \\ G_{\infty} \geq 0}} \quad (15)$$

przy ograniczeniach

$$\bar{G}(t_i) = \int_0^{\infty} H_M(v) e^{-tv} dv + G_{\infty}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (16)$$

Podobnie jak w przypadku zadania oryginalnego (3), (4), istnienie rozwiązania zadania (15), (16) wynika natychmiast z wypukłości wskaźnika kwadratowego (15) oraz liniowości ograniczeń równościowych (16). Rozwiązanie to jest jednoznaczne, można je wyznaczyć metodą mnożników Lagrange'a, dane jest ono formułą:

$$H_{M,N}(v) = \lambda_N^T \phi_N(v) = [\bar{G}_N^T - G_{\infty} \mathbf{1}^T] \Phi_N^{-1} \phi_N(v), \quad (17)$$

gdzie wektor mnożników Lagrange'a,

$$\lambda_N = \Phi_N^{-1} [\bar{G}_N - G_{\infty} \mathbf{1}], \quad (18)$$

$\mathbf{1}$  jest  $N$  wymiarowym wektorem o elementach jednostkowych, a optymalna wartość ustalona modułu relaksacji dana jest wzorem:

$$G_{\infty} = \begin{cases} \alpha_N^{-1} \mathbf{1}^T \Phi_N^{-1} \bar{G}_N & \text{gd}y \quad \mathbf{1}^T \Phi_N^{-1} \bar{G}_N > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad (19)$$

gdzie stała  $\alpha_N = \mathbf{1}^T \Phi_N^{-1} \mathbf{1} > 0$ .

### Spektrum relaksacji próbki buraka cukrowego

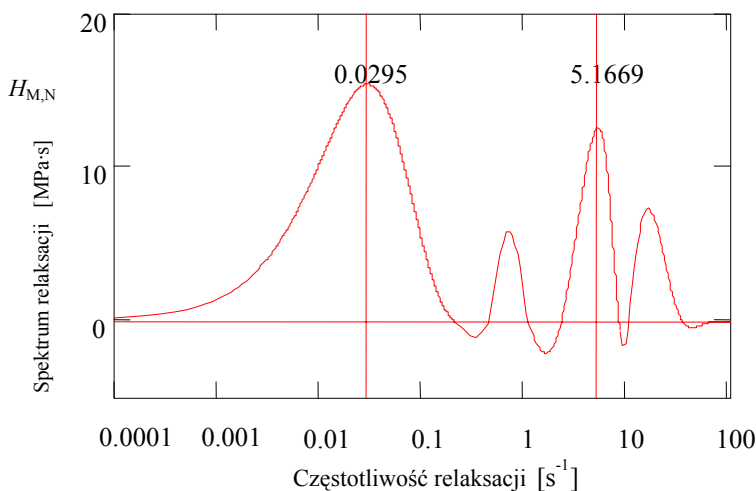
W tym punkcie wyznaczmy spektrum częstotliwości relaksacji próbki rzeczywistego materiału roślinnego – buraka cukrowego odmiany Janus - na podstawie danych zgromadzonych eksperymentalnie przez Gołackiego [Gołacki 2002]. Przyjęcie modelu liniowo lepko-sprężystego do opisu mechanicznych własności próbek badanego materiału uzasadniają wyniki badań prezentowane w wielu pracach, np. [Bzowska-Bakalarz 1994; Gołacki 2002]. Walcową próbkę o średnicy i wysokości 20 mm poddano złożonemu z dwu faz testowi relaksacji naprężeń [Rao 1999] w warunkach stanu jednoosiowego odkształcenia - próbkę umieszczono w stalowym cylindrze uniemożliwiającym jej boczne odkształcenie i odkształcano w pierwszej fazie testu poprzez przesuwanie tłoka z prędkością  $0.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , aż do osiągnięcia założonej stałej wartości odkształcenia  $\epsilon_0 = 0.04$  utrzymywanego w drugiej fazie testu. Zmienną w czasie siłę reakcji próbki rejestrowano przez 100 s w 40000 punktach pomiarowych ze stałym okresem próbkowania  $\Delta t = 0.0025 \text{ s}$ . Do identyfikacji

## Identyfikacja spektrum relaksacji...

spektrum relaksacji wybrano 1164 punkty pomiarowe, pierwsze 200 co  $\Delta t = 0.0025 s$  na odcinku czasu  $0 \leq t \leq 0.5 s$ , kolejne 964 punktów z okresem próbkowania  $\Delta t_1 = 0.1 s$  na odcinku czasu  $0.5 \leq t \leq 97 s$ . Na podstawie wybranych pomiarów siły reakcji badanej próbki wyznaczono pomiary modułu relaksacji  $\{\bar{G}(t_i)\}$ . W literaturze znanych jest kilka algorytmów wyznaczania modułu relaksacji na podstawie pomiarów naprężenia. Tu zastosowano zmodyfikowany w pracy [Stankiewicz 2007] algorytm Zapasa i Crafa [Zapas i Phillips 1971]

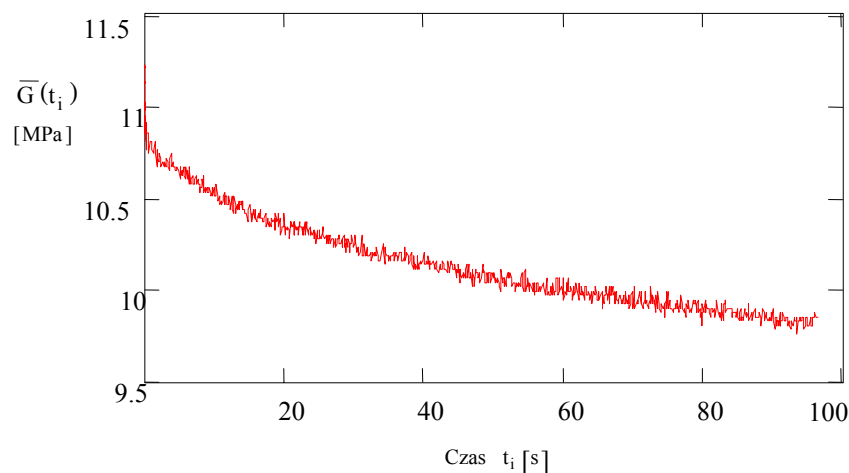
$$\bar{G}(t) = \frac{F(t + t_{m,real}/2)}{\epsilon_0 p} \quad \text{dla } t \geq t_{m,real}/2,$$

gdzie  $F(t)$  jest zarejestrowaną doświadczalnie siłą reakcji próbki,  $t_{m,real}$  to rzeczywisty czas, dla którego zarejestrowana doświadczalnie siła reakcji próbki przyjmuje wartość maksymalną, a  $p$  oznacza pole przekroju poprzecznego próbki. Dla badanej próbki  $t_{m,real} = 0.0125 s$ . Pomiary modułu relaksacji przedstawia rysunek 1. Zastosowano zmodyfikowany schemat obliczeń (17)-(19); optymalna wartość ustalona modułu relaksacji  $G_\infty = 9.70543 MPa$ , przebieg wyznaczonego spektrum relaksacji przedstawia rysunek 2.



Rys. 1. Pomiary modułu relaksacji  $\bar{G}(t_i)$  – próbka buraka cukrowego

Fig. 1. The relaxation modulus measurements  $\bar{G}(t_k)$  - sample of beet sugar root



Rys. 2. Spektrum częstotliwości relaksacji  $H_{M,N}(\nu)$  próbki buraka cukrowego

Fig. 2. Relaxation frequencies spectrum  $H_{M,N}(\nu)$  of a sample of beet sugar root

### Uwagi końcowe

1. Własności metody, w tym jakość wygładzenia spektrum relaksacji, zależą zarówno od planu eksperymentu, czyli doboru punktów próbkowania modułu relaksacji jak i od wyników eksperymentu.
2. Można także pokazać, że jeśli rzeczywiste spektrum relaksacji leży w przyjętej klasie modeli, czyli jest kombinacją liniową funkcji wykładniczych  $e^{-t_1\nu}, \dots, e^{-t_N\nu}$ , a jego pomiary nie są obciążone zakłóceniami, to algorytm ten gwarantuje jednoznaczne wyznaczenie rzeczywistego spektrum, czyli zapewniała jego identyfikowalność.
3. Zaproponowana metoda jest na tyle ogólna, że może znaleźć zastosowanie do badania własności mechanicznych ciał lepkosprężystych zarówno stałych jak i płynnych.
4. Macierz Gramma  $\Phi_N$  jest nieosobliwa dla dowolnego planu eksperymentu, jednak w praktyce dla wielu planów eksperymentu może być ona źle uwarunkowana, a to oznacza, że niewielkie fluktuacje danych pomiarowych mogą jednak powodować istotne fluktuacje uzyskanego rozwiązania. Przedstawiona w tej pracy metoda wygładzania spektrum relaksacji wymaga wówczas modyfikacji, może być ona przedmiotem dalszych badań.

### Bibliografia

- Brabec Ch. J., Rögl H., Schausberger A.** 1997. Investigation of relaxation properties of polymer melts by comparison of relaxation time spectra calculated with different algorithms. *Rheol. Acta*. Vol. 36. pp. 667–676,
- Bzowska-Bakalarz M.** 1994. Właściwości mechaniczne korzeni buraków cukrowych. *Rozprawy Naukowe Akademii Rolniczej w Lublinie*. No. 166.



- Anderssen R.S., Loy R.J.** 2002. Rheological implications of completely monotone fading memory. *J. Rheol.* Vol. 46(6). pp. 1459-1472.
- Christensen R.M.** 1971. *Theory of Viscoelasticity. An Introduction.* Academic Press, New York.
- Gołacki K.** 2002. Lepkosprężyste charakterystyki korzeni buraków cukrowych. *Acta Agrophysica.* Vol. 78. s. 37-49.
- Kaczorek T.** 1998. *Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice.* WNT, Warszawa.
- Rao M.A.** 1999. *Rheology of Fluid and Semisolid Foods. Principles and Applications.* Aspen Publishers, Inc., Gaithersburg, Maryland.
- Stankiewicz A.** 2007. Identyfikacja spektrum relaksacji lepkosprężystych materiałów roślinnych. Rozprawa doktorska, Akademia Rolnicza w Lublinie. Lublin.
- Stankiewicz A.** 2009. Identyfikacja spektrum relaksacji metodą momentów: motywacje i idea metody. *Inżynieria Rolnicza.* Nr 6(115). s. 249-258.
- Stankiewicz A., Gołacki K.** 2008. Approximation of the Continuous Relaxation Spectrum of Plant Viscoelastic Materials using Laguerre Functions. *Electronic Journal of Polish Agricultural Universities, Series: Agricultural Engineering.* 11 (1/volume11) #20, (<http://www.ejpau.media.pl/volume11/issue1/art-20.pdf>).
- Zapas L.J., Phillips J.C.** 1971. Simple shearing flows in polyisobutylene solutions. *J. Res. Nat. Bur. Stds.* Vol. 75A (1). pp. 33-40.

## IDENTIFICATION OF THE RELAXATION SPECTRUM BY MOMENT METHOD APPROACH: THEORETICAL PROPERTIES AND APPLICATION

**Abstract.** The paper deals with the problem of recovery of continuous relaxation spectrum from discrete-time noise corrupted measurements of relaxation modulus obtained in stress relaxation test. A new robust identification algorithm is discussed in which the best smoothing of the model is achieved together with simultaneous interpolation of the relaxation modulus measurements. It is proved that the smoothing of the resulting relaxation spectrum model depends both on the proper selection of the measurement points as well as on the experiment results. It is also proved that the accuracy of the spectrum approximation depends linearly on measurement noises. A useful modification of the scheme is proposed for the case when the equilibrium stress modulus is non-zero and simple recursive formula is derived. The method is general enough to cover both viscoelastic solids and liquids. The effectiveness of the method is demonstrated through the computation of the relaxation spectrum of the beet sugar root sample in the state of the uniaxial strain.

**Key words:** viscoelasticity, relaxation spectrum, identification algorithm, optimal model smoothing, beet sugar root

**Adres do korespondencji:**

Anna Stankiewicz; e-mail: [anna.stankiewicz@up.lublin.pl](mailto:anna.stankiewicz@up.lublin.pl)  
Katedra Podstaw Techniki,  
Uniwersytet Przyrodniczy w Lublinie  
ul. Doświadczalna 50A  
20-280 Lublin

