

## MODELOWANIE RELACJI STRUMIENIA MASOWEGO CIECZY Z CIŚNIENIEM BEZWZGLĘDNYM W APARACIE UDOJOWYM

Henryk Juszka, Stanisław Lis, Marcin Tomasik

*Katedra Energetyki Rolniczej, Akademia Rolnicza w Krakowie*

**Streszczenie.** Przedstawiono układ zależności umożliwiający generowanie strumienia masowego cieczy będącego reprezentacją natężenia wypływającego ze strzyka krowy mleka, opracowany z zastosowaniem równania Bernoulliego. Symulację prowadzono w programie Matlab® - Simulink a jej wyniki przedstawiono na wykresach z których wynika, że obliczony strumień masowy cieczy, pozwala obserwować oddziaływanie zwrotne pomiędzy ciśnieniem bezwzględnym a strumieniem masowym w komorze podstrzykowej kubka udojowego.

**Słowa kluczowe:** dój maszynowy krów, podciśnienie, wypływ mleka ze strzyka krowy.

### Wstęp

Niewiele badań doju maszynowego krów obejmuje dokładną analizę zagadnienia na styku strzyk – kubek udojowy. Problem dotyczy relacji ciśnienia bezwzględnego z wypływem mleka z ćwiartki wymienia. Zagadnienie to, jest szczególnie ważne w przystosowaniu parametrów doju maszynowego krów do ich cech osobniczych w zakresie oddawania mleka [Juszka 1998; Kwieciński 1984]. Stąd w pracy zaproponowano układ zależności pozwalający na analizę oddziaływania pomiędzy ciśnieniem bezwzględnym a strumieniem masowym cieczy zastępującej mleko wypływające ze strzyka krowy w komorze podstrzykowej kubka udojowego.

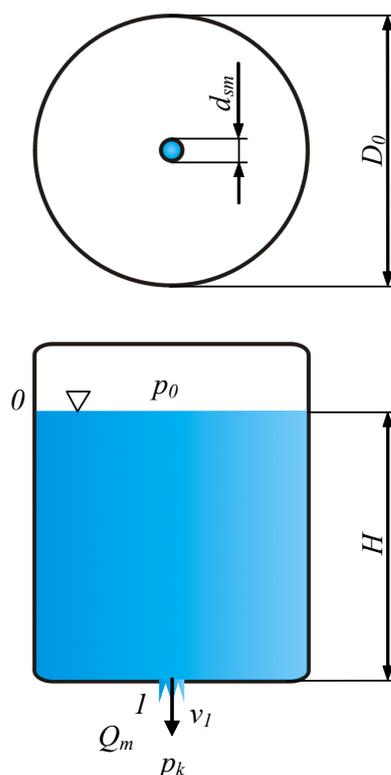
### Cel i zakres pracy

Celem pracy było zamodelowanie w programie Matlab® Simulink układu zależności, umożliwiającego generowanie przebiegu wartości strumienia masowego cieczy. Strumień ten w obliczeniach reprezentuje wypływ mleka ze strzyka. Przeprowadzono analizę oddziaływania pomiędzy ciśnieniem bezwzględnym a generowanym natężeniem strumienia cieczy w komorze podstrzykowej kubka udojowego.

Zakres pracy obejmuje: sformułowanie zależności matematycznych opisujących strumień masowy cieczy reprezentujący natężenie mleka wypływającego ze strzyka krowy oraz symulację komputerową i przedstawienie jej wyników w postaci wykresów.

### Aproksymowanie wypływu mleka ze strzyka

Dla szczegółowego rozpoznania oddziaływania pomiędzy ciśnieniem bezwzględnym a natężeniem strumienia mleka w komorze podstrzykowej kubka udojowego przy wykorzystaniu zależności matematycznych, konieczne było wprowadzenie do przestrzeni roboczej programu Matlab® Simulink przebiegu wartości strumienia masowego cieczy reprezentującego w obliczeniach wypływ mleka ze strzyka. W tym celu generowano dla modelu, przebieg natężenia strumienia cieczy według schematu przedstawionego na rys. 1. W obliczeniach założono, że w modelowanym układzie ciecz o objętości 0,0038 [m<sup>3</sup>] wypływała z zamkniętego zbiornika przez otwór, którego średnica  $d_{sm}$  zmieniała się w funkcji czasu (rys. 2). Dzięki takiemu rozwiązaniu uzyskano przebieg generowanego natężenia strumienia wypływającej cieczy o zbliżonym kształcie do zmian wartości strumienia masowego mleka wypływającego ze strzyka krowy. Według Zaksa [1969] ciśnienie bezwzględne w zatoce mlecznej wymienia krowy wynosi 105 [kPa], dlatego przyjęto, że wartość ciśnienia w modelowanym zbiorniku jest stała i również wynosi  $P_0 = 105$  [kPa].



Źródło: opracowanie własne autorów

Rys. 1. Wypływ cieczy ze zbiornika przy wystąpieniu różnicy ciśnień  
 Fig. 1. Liquid outflow from the tank in the case of pressure differences

Dla zaproponowanego układu zastosowano równanie Bernoulliego dla przekrojów 0 i 1, oznaczając symbolem  $v_l$  prędkość cieczy wypływającej przez otwór wylotowy [Bukowski 1975] (1):

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + H = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_k}{\gamma} \quad (1)$$

gdzie:

- $v_0$  – prędkość cieczy w przekroju 0 [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ],
- $p_0$  – ciśnienie bezwzględne nad zwierciadłem cieczy w zbiorniku [Pa],
- $p_k$  – ciśnienie bezwzględne pod otworem wypływowym (w komorze podstrzykowej) [Pa],
- $v_1$  – prędkość cieczy wypływającej przez otwór wylotowy [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ],
- $H$  – odległość zwierciadła cieczy od otworu wypływowego [m],
- $\gamma$  – ciężar właściwy cieczy [ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-2}$ ].

Prędkość  $v_0$  wyznaczono z równania ciągłości strugi korzystając z zależności (2),

$$v_0 = v_1 \cdot \frac{d_{sm}^2}{D_0^2} \quad [\text{m}\cdot\text{s}^{-1}] \quad (2)$$

zatem

$$\frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} = \frac{p_0 - p_k}{\gamma} + H, \quad \frac{v_1^2}{2g} \cdot \left[ 1 - \frac{d_{sm}^4}{D_0^4} \right] = \frac{p_0 - p_k}{\gamma} + H \quad (3)$$

Po przekształceniu otrzymano prędkość wypływu  $v_1$

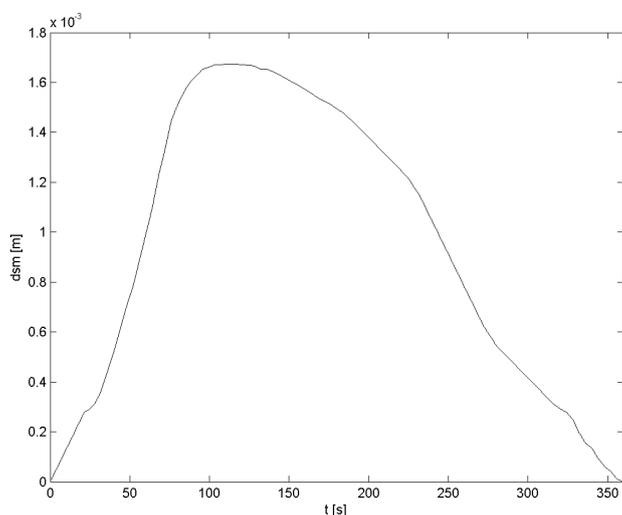
$$v_1 = \sqrt{\frac{2g \frac{p_0 - p_k}{\gamma} + H}{1 - \frac{d_{sm}^4}{D_0^4}}} \quad [\text{m}\cdot\text{s}^{-1}] \quad (4)$$

W przedstawionym wzorze (4) przez  $D_0$  oznaczono średnicę zbiornika na wysokości przekroju 0. Natomiast średnicę otworu wylotowego, której wartość w obliczeniach ulegała zmianie, oznaczono przez  $d_{sm}$ . Następnie korzystając z otrzymanej wartości prędkości  $v_1$  obliczono według zależności (5) natężenie strumienia cieczy  $Q_m$  reprezentującej strumień masowy mleka wypływającego ze strzyka. Straty miejscowe dla otworu pominięto.

$$Q_m = A_1 \cdot v_1 \cdot \rho \quad [\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}] \quad (5)$$

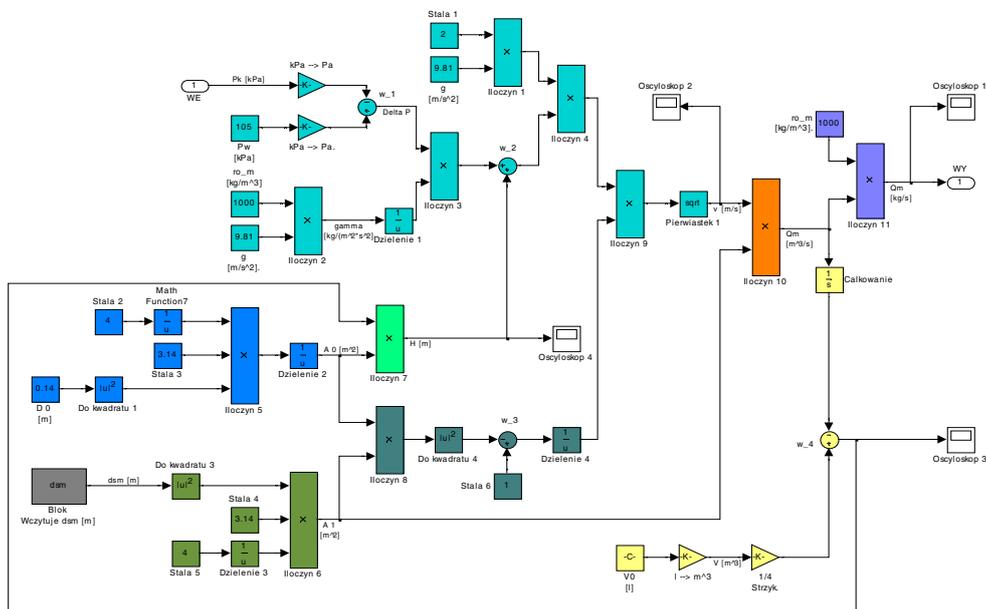
W zależności (5)  $\rho$ , to gęstość cieczy w [ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ],  $v_1$  w [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ] oznacza jej prędkość, natomiast  $A_1 = \frac{\pi d_{sm}^2}{4}$  w [ $\text{m}^2$ ] wyraża pole powierzchni strugi cieczy.

Przedstawione zależności po zapisaniu w programie Matlab<sup>®</sup> Simulink przyjęły postać następującego schematu blokowego (rys. 3).



Źródło: opracowanie własne autorów

Rys. 2. Przebieg zmian wartości średnicy strumienia cieczy wypływającej ze zbiornika  
 Fig. 2. Course of changes in the values of the diameter of the liquid stream flowing out of the tank



Źródło: opracowanie własne autorów

Rys. 3. Schemat symulacji natężenia wypływu cieczy ze zbiornika  
 Fig. 3. Schematic presentation of the intensity of the liquid outflow from the tank

### Model pracy aparatu udojowego

Do symulacji wykorzystano model pracy klasycznego aparatu udojowego do doju przemiennego [Kupczyk 1999, Juszka i in. 2005].

Symulację przeprowadzono dla aparatu udojowego o następujących parametrach: pojemność komór podstrzykowych  $V_k = 29 \text{ [cm}^3\text{]}$ , średnice wewnętrzne krótkich przewodów mlecznych  $d = 12,5 \text{ [mm]}$ , pojemność komory mlecznej kolektora  $V_{kol} = 360 \text{ [cm}^3\text{]}$ . Symulacja komputerowa przebiegała według schematu przedstawionego na rys. 4. Pozwoliła ona na szczegółowe rozpoznanie oddziaływania pomiędzy ciśnieniem bezwzględnym a natężeniem cieczy reprezentującej w obliczeniach strumień mleka w komorze podstrzykowej kubka udojowego.



*Źródło: opracowanie własne autorów*

Rys. 4. Schemat blokowy symulacji komputerowej pracy klasycznego aparatu udojowego  
 Fig. 4. Block diagram for the computer simulation of classical milking apparatus operation

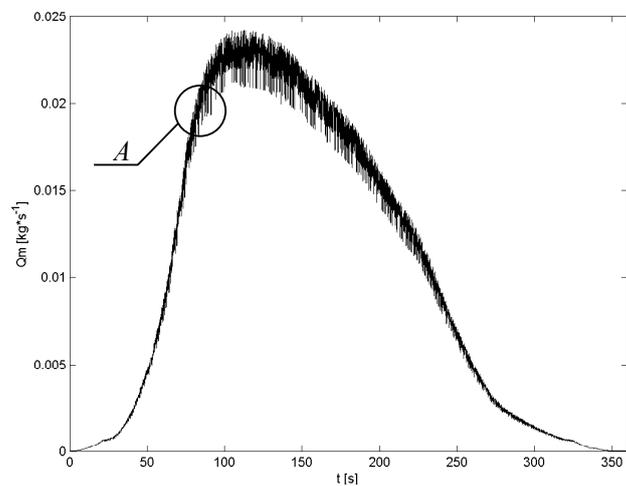
### Wyniki badań symulacyjnych

Symulację komputerową pracy klasycznego aparatu udojowego przeprowadzono w przedziale czasu 0 - 360 sekund. W jej wyniku uzyskano przebieg strumienia masowego cieczy na który oddziaływało ciśnienie bezwzględne w komorach podstrzykowych kubków udojowych. Zmiany przebiegu natężenia strumienia cieczy reprezentującej mleko wypływające ze strzyka krowy dla kubka udojowego wchodzącego w skład sekcji I-iej przedstawia rys. 5.

Uzyskany przebieg generowanego natężenia strumienia cieczy, wskazuje na podobieństwo do zmian wartości strumienia masowego mleka wypływającego ze strzyki krowy. Obserwowane na wykresie powtarzające się zakłócenia są efektem oddziaływania zwrotnego zmieniającej się wartości ciśnienia bezwzględnego w komorze podstrzykowej na ten przebieg. Aby poddać analizie obserwowane zakłócenia, losowo wybrany przedział czasu, w którym fragment przebiegu strumienia masowego cieczy zaznaczono jako szczegół „A” zilustrowano na rys. 6.

Linia zakłóceń tego przebiegu jest odwzorowaniem odwróconej w płaszczyźnie pionowej linii wahań ciśnienia bezwzględnego w komorze podstrzykowej kubka udojowego, z przebiegu przedstawionego na rys. 7.

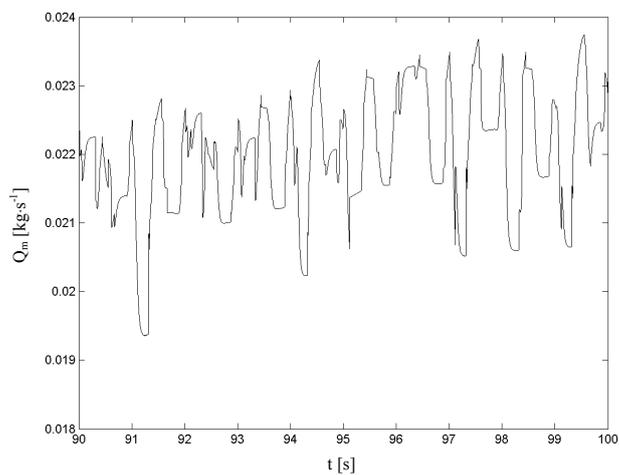
Obserwowane na rys. 7 chwilowe cykliczne wahania ciśnienia bezwzględnego w komorze podstrzykowej kubka udojowego sekcji I-iej są skutkiem zmian objętości tej komory wywołanych zamykaniem i otwieraniem się gumy strzykowej.



Źródło: opracowanie własne autorów

Rys. 5. Strumień masowy cieczy reprezentujący mleko wypływające ze strzyka krowy do komory podstrzykowej kubka udojowego sekcji I-ej

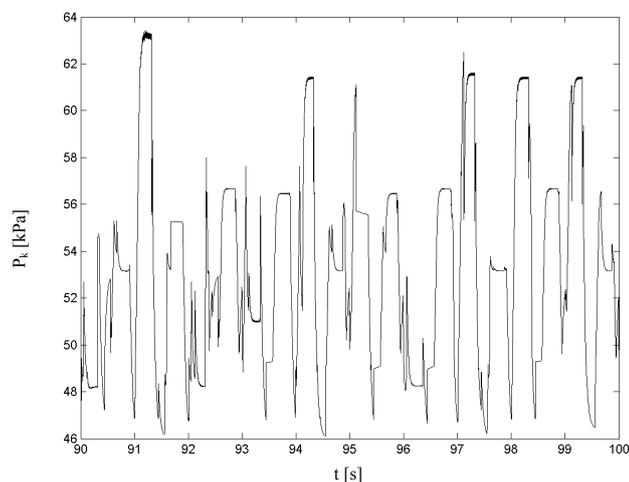
Fig. 5. Liquid mass stream representing milk flowing from the cow's teat to the under-teat chamber of the section 1 teat cup



Źródło: opracowanie własne autorów

Rys. 6. Fragment przebiegu strumienia masowego

Fig. 6. Fragment of the course of flow of the mass stream



Źródło: opracowanie własne autorów

Rys. 7. Ciśnienie bezwzględne w komorze podstrzykowej kubka udojowego sekcji I-ej  
Fig. 7. Absolute pressure in the under-teat chamber of the section 1 teat cup

## Wnioski

1. Uzyskany przebieg generowanego natężenia strumienia cieczy wskazuje na podobieństwo do zmian wartości strumienia masowego mleka wypływającego ze strzyka krowy.
2. Obliczony strumień masowy cieczy reprezentujący w obliczeniach natężenie mleka wypływającego ze strzyka, pozwala zaobserwować oddziaływanie zwrotne pomiędzy ciśnieniem bezwzględnym a natężeniem cieczy w komorze podstrzykowej kubka udojowego.
3. Przedstawiony model umożliwia na etapie prac projektowych dalsze doskonalenie warunków doju maszynowego krów, poprzez zbliżenie parametrów tego procesu do ich cech osobniczych w zakresie oddawania mleka.

## Bibliografia

- Bukowski J.** 1975. Mechanika płynów. PWN. Warszawa.
- Juszka H.** 1998. Studia nad parametrami procesu ssania u cieląt w aspekcie nowych technik doju krów. KT PAN, PTIR, IBMER, Warszawa, Inżynieria Rolnicza – Rozprawy habilitacyjne 1, II, 3, (4). s. 1-163.
- Juszka H., Lis S., Tomasik M.** 2005. Modelowanie i sterowanie rozmyte aparatem udojowym. Problemy Inżynierii Rolniczej. Nr 4 (50). s. 57-64.

**Kupczyk A.** 1999. Doskonalenie warunków doju mechanicznego ze szczególnym uwzględnieniem podciśnienia w aparacie udojowym. KT PAN, PTIR, IBMER, Warszawa, Inżynieria Rolnicza - Rozprawy habilitacyjne, 3(9).

**Kwieciński A.** 1984. Maszyny i urządzenia w produkcji zwierzęcej. PWN, Warszawa.

**Maksim Z.** 1969. Gruczoł mleczny zwierząt i człowieka: nerwowa i hormonalna regulacja rozwoju i czynności. Państwowe Wydawnictwo Rolnicze i Leśne, Warszawa.

## **MODELLING OF THE RELATION OF LIQUID MASS STREAM AND ABSOLUTE PRESSURE IN A MILKING APPARATUS**

**Abstract.** The paper presents a dependency system enabling the generation of liquid mass stream representing the intensity of milk flowing out of the cow's teat, developed using Bernoulli's equation. The simulation was performed using the Matlab® - Simulink program. The results are presented by means of diagrams which show that the calculated liquid mass stream makes it possible to observe the reflexive interaction between absolute pressure and the mass stream in the under-teat chamber of the teat cup.

**Key words:** mechanical milking of cows, negative pressure, milk outflow from the cow's teat

**Adres do korespondencji:**

Henryk Juszka; email: [hjuszka@ar.krakow.pl](mailto:hjuszka@ar.krakow.pl)  
Katedra Energetyki Rolniczej  
Uniwersytet Rolniczy w Krakowie  
ul. Balicka 116B  
30-149 Kraków