

## KIERUNKI NAPRĘŻEŃ GŁÓWNYCH ORAZ KĄT POŚLIZGU PODCZAS DYNAMICZNEGO SKRAWANIA GLEBY ZA POMOCĄ PŁASKIEJ PŁYTKI

*Mieczysław Szpryngiel, Jan Czop*

*Katedra Eksploatacji Maszyn i Zarządzania w Inżynierii Rolniczej, Uniwersytet Przyrodniczy w Lublinie*

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono analityczną metodę wyznaczania kierunków naprężeń głównych. Przeprowadzona analiza pozwala na stwierdzenie, że wypadkowa siła nacisku płaskiej płytki na glebę powoduje wystąpienie w niej wzajemnie prostopadłych naprężeń głównych, co umożliwia wyznaczenie za pomocą koła Mohra kąta pochylenia płaszczyzny w której występują największe naprężenia ścinające. Siła bezwładności i ciężar skiby nie powodują zmiany kierunków naprężeń głównych, nie zmieniają więc kierunku nachylenia płaszczyzny ścinania skiby.

**Słowa kluczowe:** skrawanie gleby, opór skrawania, naprężenia główne, płytka płaska

### Wykaz oznaczeń

- a – głębokość skrawania,
- b – szerokość płytki,
- C – kohezja gleby,
- $\alpha$  – kąt ustawienia płytki,
- $\beta$  – kąt poślizgu gruntu przy ścinaniu,
- $\sigma_N$  – naprężenia normalne w płaszczyźnie ścinania,
- $\phi$  – kąt tarcia wewnętrznego gleby,
- $\rho$  – kąt tarcia zewnętrznego pomiędzy skrawaną glebą a materiałem z którego jest wykonana płytka.

### Wstęp

Ulepszanie stosowanych narzędzi jak też optymalizacja technologii ich użytkowania jest jednym z głównych czynników mogących poprawić ekonomiczność produkcji rolniczej. Podstawowym zagadnieniem pozostaje optymalizacja konstrukcji narzędzi pod kątem jak najmniejszego zapotrzebowania na energię przy zapewnieniu właściwych wymagań agrotechnicznych. Pomimo trwających od lat prac proces skrawania gleby zawiera wiele nie poznanych do końca zależności. Podstawowymi zagadnieniami, których poznanie było i pozostaje nadal celem badań są określenia siły oporu gleby podczas skrawania oraz

wyznaczenie kształtu przekroju płaszczyzną równoległą do kierunku ruchu odkształcanej części gleby.

Do chwili obecnej powstało wiele mniej lub bardziej skomplikowanych metod obliczania oporu gleby skrawanej przy pomocy płaskiej płytki. Wśród tych które opierają się na hipotezach Mohra i Coulomba żaden z autorów nie wykazał, że stosowanie wspomnianych hipotez w odniesieniu do skrawającego glebę narzędzia jakim jest przemieszczająca się w glebie i ustawiona pod kątem ostrym płaska płytka jest uzasadnione. Jeden z badaczy [Zdanowicz, 1972] kwestionuje możliwość bezpośredniego zastosowania hipotezy Mohra w przypadku narzędzia skrawającego glebę stwierdzając, że kierunki naprężeń głównych nie są do siebie wzajemnie prostopadłe.

Zgodnie z hipotezą Coulomba stwierdzającą, że równowaga ośrodka zależy od stosunku naprężeń normalnych i stycznych, wytrzymałość gleby spoistej na ścinanie może być przedstawiona wzorem:

$$\tau = C + \sigma_N \operatorname{tg} \phi \quad (1)$$

Jednym z pierwszych badaczy zajmujących się teoretycznie i doświadczalnie zagadnieniem odkształcania skiby był polski uczoney Gołogurski [1911]. Stosując hipotezę Coulomba, przy założeniu, że w płaszczyźnie poślizgu występują maksymalne naprężenia ścinające badając maksimum funkcji  $\tau = f(\beta)$  jako pierwszy podał zależność pozwalającą określić wartość kąta poślizgu gruntu  $\beta$ , w postaci

$$\beta = \frac{\pi - \alpha - \phi - \rho}{2} \quad (2)$$

Model przedstawiony przez Gołogurskiego nie uwzględnia jednak ciężaru skiby i wpływu prędkości skrawania na wielkość oporu skrawania.

W podobnym jak u Gołogurskiego modelu obciążeń płytki płaskiej, potwierdzenie wyprowadzonego przez Gołogurskiego wyrażenia na wartość kąta poślizgu Haman [1960] uzyskuje z warunku na minimum składowej poziomej wypadkowej oporu skrawania.

Rozbudowany model pracy płytki płaskiej uwzględniający ciężar skiby i prędkość skrawania przedstawił Söhne [1956], nie doprowadził on jednak swej pracy do końca ponieważ nie podał zależności ani metody pozwalającej na określenie wartości kąta poślizgu gruntu przy ścinaniu pomimo tego, że używa tej wielkości w proponowanym przez siebie wyrażeniu na wielkość oporu gleby.

Na podstawie podobnego jak u Söhne modelu obciążeń, Worona [1977] wartość kąta poślizgu znajduje różniczkując składową poziomą działającego na element roboczy oporu skrawania gruntu względem kąta  $\beta$  przy wykorzystaniu programu komputerowego. Metoda ta nie doprowadza jednak do uzyskania bezpośrednio stosownego wyrażenia pozwalającego na obliczenie kąta poślizgu ani też nie daje odpowiedzi jaki jest wpływ ciężaru skiby i siły bezwładności na jego wartość. W podobny sposób wartość kąta poślizgu gruntu przy ścinaniu określają McKyes i Desir [1984] oraz Swick i Perumpral [1988].

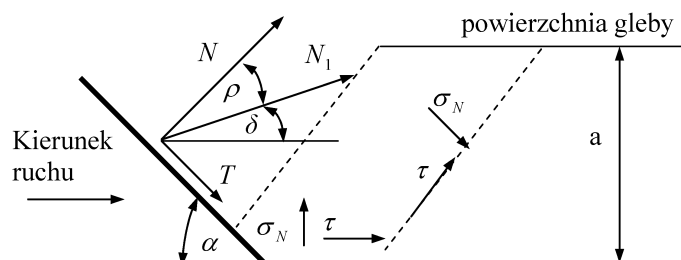
Przeprowadzona poniżej analiza będzie dotyczyła gleb spójnych, odkształcających się sprężysto-plastycznie takich jak gleby gliniaste i ilaste, nie będzie dotyczyć gleb sypkich np. piaszczystych, przy założeniu, że gleba jest ciałem jednorodnym, izotropowym, speł-

niającym kryterium Mohra-Coulomba, powierzchnia ścinania jest płaska, w wyniku ścinania powstaje skiba schodkowa.

Przemierzająca się w glebie płaska płytki wywołuje w skrawanej warstwie gleby naprężenia powodujące oddzielenie się skrawanej warstwy od podłoża oraz jej zginanie w przypadku powstawania skiby ciągłej lub ścinanie w przypadku powstawania skiby schodkowej. Wypadkowa siła oddziaływania płytki na skrawaną glebę  $N_l$ , którą można przedstawić jako sumę siły normalnej do powierzchni płytki  $N$  i siły tarcia zewnętrznego  $T$  pomiędzy skrawaną glebą a materiałem z którego jest wykonana płytka, działa na skrawaną glebę pod kątem  $\delta$ , którego wartość wynosi.

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \alpha - \rho \quad (3)$$

Schemat oddziaływania płaskiej płytki na skrawaną glebę przedstawia rysunek 1.



Rys. 1. Schemat oddziaływania płaskiej płytki na skrawaną glebę  
Fig. 1. Diagram of flat plate impact on soil being cut

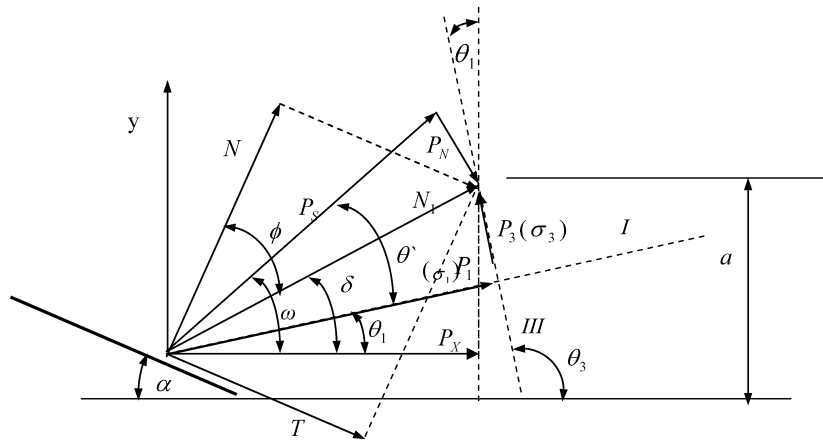
Jeżeli wypadkowa siły tarcia i siły nacisku jest skierowana w górę, w kierunku powierzchni gruntu, w płaszczyźnie poziomej w której następuje oddzielenie skiby od podłoża oraz w każdej innej płaszczyźnie nachylonej do poziomu pod kątem mniejszym niż wypadkowa siła nacisku płytki na glebę, naprężenia normalne są skierowane ku powierzchni gleby powodując odrywanie skiby od podłoża. Ponieważ wytrzymałość gleb na rozciąganie jest bardzo mała, możemy przyjąć iż opór ten można bez popelnienia większego błędu pominąć podobnie jak Söhne [1956] Worona [1977] i inni.

Przedstawiony na rysunku 1 układ sił jest typowym układem wywołującym zginanie i ściskanie elementu skiby ABCDE znajdującego się w strefie oddziaływania płytki. Ponieważ gleba jest ośrodkiem charakteryzującym się pewną sprężystością i plastycznością, płytka wnika w glebę wywołując powstanie w niej naprężeń. Zgodnie z hipotezą Coulomba dopóki powstałe naprężenia nie przekroczą naprężeń granicznych uwarunkowanych jej wytrzymałością nie nastąpi oddzielenie znajdującego się w strefie oddziaływania płytki elementu gleby od calizny.

**Nowa metoda określania wartości i kierunków naprężeń głównych podczas skrawania gleby za pomocą płaskiej płytki**

Znając kierunek działania wypadkowej siły nacisku klina na grunt warto by się przekonać czy siła ta może spowodować wystąpienie dwu wzajemnie prostopadłych kierunków naprężeń głównych, gdyż tylko wtedy wyprowadzona wartość kąta poślizgu gruntu może być zgodna z zasadami obowiązującymi przy kreśleniu koła Mohra.

Przyjmijmy dowolnie dwa prostopadłe do siebie kierunki naprężeń głównych oznaczone tak jak to przedstawia rys. 2 jako *I* oraz *III*, a kąty jakie tworzą one z linią poziomą odpowiednio jako  $\theta_1$  i  $\theta_3$ :



Rys. 2. Wyznaczanie kierunków naprężeń głównych spowodowanych wypadkową siłą nacisku płytki na grunt

Fig. 2. Determination of directions of main stresses generated by the resultant force of plate pressure against soil

Siłę  $N_1$  możemy rozłożyć na działającą w płaszczyźnie *I*, nachyloną do poziomu pod kątem  $\theta_1$  siłę  $P_1$ , oraz działającą w płaszczyźnie *III*, nachyloną do poziomu pod kątem  $\theta_3$  siłę  $P_3$ . Zgodnie z kryterium Mohra siły te powinny wywoływać odpowiednio prostopadłe do siebie naprężenia  $\sigma_1$  i  $\sigma_3$ , przy czym:

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_{III}}, \quad \sigma_3 = \frac{P_3}{A_I} \tag{4}$$

gdzie:

$$P_1 = N_1 \cos(\delta - \theta_1) \tag{5}$$

$$P_3 = N_1 \sin(\delta - \theta_1) \tag{6}$$

$$A_I = \frac{ab}{\sin \theta_1} \quad A_{III} = \frac{ab}{\cos \theta_1}$$

Kierunki naprężeń głównych..

---

a – głębokość skrawania

b – szerokość płytki

stąd:

$$\sigma_1 = \frac{N_1 \cos(\delta - \theta_1) \cos \theta_1}{ab} \quad \text{oraz} \quad \sigma_3 = \frac{N_1 \sin(\delta - \theta_1) \sin \theta_1}{ab} \quad (7)$$

stawiając warunek:

$$\frac{d\sigma_1}{d\theta_1} = 0, \quad \text{oraz} \quad \frac{d\sigma_3}{d\theta_1} = 0$$

otrzymujemy:

$$\frac{d\sigma_1}{d\theta_1} = \frac{d}{d\theta_1} \left[ \frac{N_1 \cos \theta_1 \cos(\delta - \theta_1)}{ab} \right] = \frac{N_1}{ab} (-\sin \theta_1) \cos(\delta - \theta_1) + \cos \theta_1 \sin(\delta - \theta_1) = \frac{N_1}{ab} \sin(\delta - 2\theta_1) = 0$$

stąd:

$$\sin(\delta - 2\theta_1) = 0 \Rightarrow \delta = 2\theta_1$$

wykorzystując zależność (3)

$$\theta_1 = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha + \phi}{2} \quad (8)$$

badając znak drugiej pochodnej

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\theta_1^2} = -2 \frac{N_1}{ab} \cos(\delta - 2\theta_1)$$

stwierdzamy, że jest on ujemny. Dla  $\theta_1 < \frac{\delta}{2}$  znak pierwszej pochodnej jest dodatni, dla

$\theta_1 > \frac{\delta}{2}$  znak pierwszej pochodnej jest ujemny, oznacza to, że dla  $\theta_1 = \frac{\delta}{2}$  naprężenia  $\sigma_1$

osiągają wartość maksymalną.

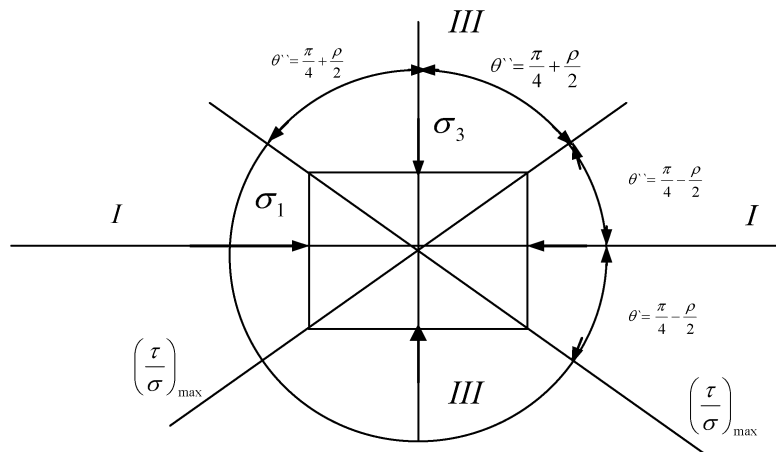
Postępując w taki sam sposób znajdujemy wartość kąta:

$$\theta_3 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}, \quad (9)$$

przy którym naprężenia  $\sigma_3$  osiągają wartość maksymalną.

### Wyznaczanie na podstawie hipotezy Mohra-Coulomba kąta poślizgu gleby przy ścinaniu

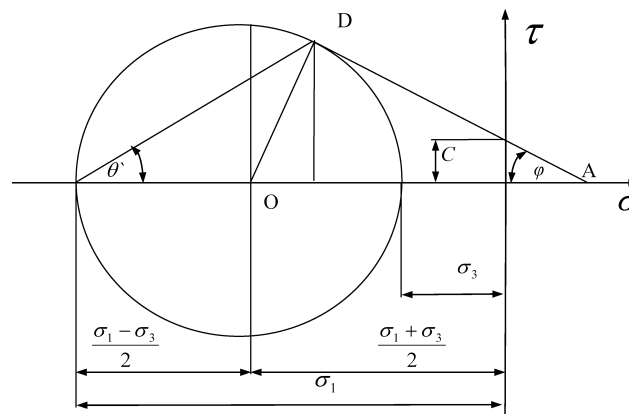
Płaski stan naprężeń w którym kierunki naprężeń głównych są wzajemnie prostopadłe odpowiadający kryterium Mohra, przedstawia rys. 3



Rys. 3. Płaski stan naprężenia panujący w elemencie gruntu z naprężeniami głównymi  $\sigma_1$  i  $\sigma_3$

Fig. 3. Flat state of stress prevailing in a soil element with main stresses  $\sigma_1$  and  $\sigma_3$

Zależność (8) pomoże określić kierunek nachylenia płaszczyzny w której naprężenia główne  $\sigma_1$  osiągają wartości maksymalne. Znajac wartości naprężeń głównych  $\sigma_1$  i  $\sigma_3$  stan naprężenia można przedstawić za pomocą kół Mohra rys. 4.



Rys. 4. Zastosowanie koła Mohra do wyznaczania kohezji i kąta tarcia wewnętrznego gleby

Fig. 4. Using of the Mohr's circle to determine soil cohesion and internal friction angle

## Kierunki naprężeń głównych..

---

Na podstawie hipotezy Coulomba obwiednią do kół Mohra wykreślonych dla różnych stanów naprężeń jest linia prosta, wyrażona równaniem (1)

Prosta ta jest nachylona do osi naprężeń głównych pod kątem równym kątowi tarcia wewnętrznego gruntu  $\phi$  i przecina oś naprężeń stycznych w punkcie  $C$ , który określa wartość kohezji gruntu.

Na podstawie hipotezy Coulomba można bardzo łatwo znaleźć kierunek nachylenia płaszczyzny poślizgu gruntu podczas ścinania

Z trójkąta AOD znajdujemy

$$2\theta' = \frac{\pi}{2} - \phi$$

stąd wartość kąta  $\theta'$  pomiędzy kierunkiem naprężenia głównego  $\sigma_1$  a kierunkiem płaszczyzny w której nastąpi poślizgu wynosi:

$$\theta' = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \quad (10)$$

Wykorzystując znaleziony przy pomocy koła Mohra kąt  $\theta'$  między kierunkiem naprężenia głównego  $\sigma_1$  a kierunkiem płaszczyzny w której nastąpi poślizg oraz wyznaczone dzięki przeprowadzonej analizie naprężeń wyrażenie (8) poszukiwany kąt poślizgu gruntu przy ścinaniu  $\beta$  wynosi:

$$\beta = \theta_1 + \theta' = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha + \rho}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}$$

ostatecznie:

$$\beta = \theta_1 + \theta' = \frac{\pi - \alpha - \phi - \rho}{2} \quad (11)$$

otrzymana wartość kąta poślizgu jest więc identyczna z otrzymanymi na innej drodze przez Gołogórskiego [1911], Hamana [1960] i Kuczewskiego [1981].

## Wnioski

Kąt między kierunkiem działania większego z naprężeń głównych  $\theta_1$  a kierunkiem przemieszczania płytki zależy jedynie od kierunku działania wypadkowej siły oddziaływania płytki na glebę, który nie zależy kierunku działania jakiegokolwiek składnika oporu gleby na wnikanie płytki a jedynie od kąta pochylenia płytki  $\alpha$  i kąta tarcia zewnętrznego  $\rho$  między materiałem płytki a skrawaną glebą, tak więc wielkość kąt ścinania skiby  $\beta$  nie może zależeć ani od kohezji gleby  $C$ , ciężaru skiby czy też siły bezwładności, ponieważ opory te nie mogą zmienić kierunku działania wypadkowego oporu skrawania. W przeciwieństwie do dotychczas stosowanych metod, metoda analizy naprężeń uzasadnia twierdzenie o braku wpływu ciężaru skiby i siły bezwładności na wartość kąta pochylenia płaszczyzny poślizgu  $\beta$ .

Wyprowadzone w wyniku analizy naprężeń wyrażenia pozwalające na określenie wartości naprężeń głównych i kierunku ich działania umożliwia zastosowanie nie tylko hipotezy Mohra i Coulomba ale też i innych hipotez wytrzymałościowych.

Kierunki naprężeń głównych są prostopadłe występuje, występuje więc podobieństwo układu statycznego płytka-gleba do układu naprężeń występujących przy obciążaniu próbki gleby w aparacie trójosiowym.

Wyprowadzone w wyniku analizy naprężeń wyrażenie pozwalające na określenie wartości kąta pochylenia płaszczyzny poślizgu  $\beta$  potwierdza ustalenia innych badaczy: Gologórskiego [1911], Hamana [1960], Kuczewskiego [1981], w takim zakresie, że na wielkość kąta poślizgu w równym stopniu wpływają kąt pochylenia płytki  $\alpha$ , kąt tarcia wewnętrznego gleby  $\phi$  i kąt tarcia zewnętrznego między materiałem płytki a glebą  $\rho$ . Przyrost kąta poślizgu wynosi połowę przyrostu każdego z tych kątów.

Przedstawiona metoda umożliwia wyznaczenie wartości naprężeń głównych na podstawie pomiaru siły wypadkowej oporu skrawania co z kolei umożliwia przy zastosowaniu kół Mohra określenie kohezji gleby i jej kąta tarcia wewnętrznego, jeżeli tylko będziemy znali wartość kąta tarcia zewnętrznego między materiałem płytki a skrawaną glebą. Należałoby tylko określić sposoby znajdowania nie występujących podczas badania próbki w aparacie trójosiowym oporów podcinania skiby oraz bocznego oddziaływania narzędzia na skrawaną glebę.

## Bibliografia

- Gologórski T. M.** 1911. Praca narzędzi w ziemi. Kraków
- Haman J.** 1960. Uwagi do zagadnienia oporów skrawania gruntów. Masz. Rol. nr 3-4.
- Kuczewski J.** 1981. Elementy teorii i obliczeń maszyn rolniczych. Skrypt SGGW Warszawa.
- McKyes E., Desir F. L.** 1984. Prediction and field measurements of tillage tool draft and efficiency in cohesive soils. Soil Till. Res. 4. s. 459-470.
- Miszczak M.** 1998. Analiza pracy spulchniacza obrotowego w glebie. Wydawnictwo SGGW Warszawa.
- Söhne W.** 1956. Einige Grundlagen für eine landtechnische Bodenmechanik. Grundlagen der Landtechnik, H. 1, VDI-Verlag, Düsseldorf. s. 11-25.
- Swick W. C., Perumpral J. V.** 1988. A model for predicting soil-tool interaction. J. Terramechanics 25(1). s. 43-56.
- Worona M.** 1977. Analiza procesu skrawania gruntów klinem prostym. Rozprawy Nr 48. Wydawnictwo AR w Szczecinie.
- Zdanowicz A.** 1972. Podstawowe problemy mechaniki procesu skrawania gruntów narzędziami rolniczymi. Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa.



## **DIRECTIONS OF MAIN STRESSES AND SHEAR ANGLE DURING DYNAMIC SOIL CUTTING USING A FLAT PLATE**

**Abstract.** The article presents an analytical method used to determine main stress directions. Completed analysis allows to state that resultant force of the flat plate pressure against soil generates main stresses in this soil, being perpendicular to each other. This allows to use the Mohr's circle to determine the inclination angle for a plane, in which highest shearing stresses occur. Force of inertia and furrow-slice weight do not change the direction of main stresses, and thus they do not affect the direction of furrow shearing plane inclination.

**Key words:** soil cutting, cutting resistance, main stresses, flat plate

**Adres do korespondencji:**

Mieczysław Szpryngiel;  
Katedra Eksploatacji Maszyn i Zarządzania w Inżynierii Rolniczej  
Uniwersytet Przyrodniczy w Lublinie  
Ul. Głęboka 28  
20-612 Lublin